

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



# Criticalidade e Processos Estocásticos na Economia

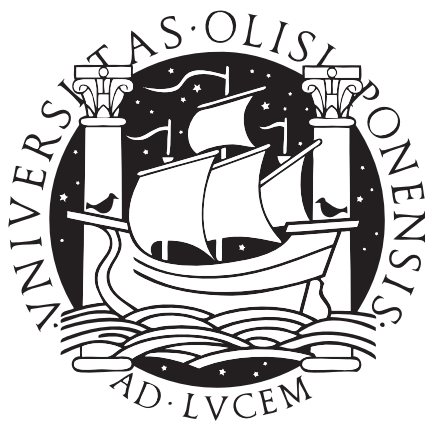
**João Pires da Cruz**

Mestrado em Engenharia Física

2010



UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



# Criticalidade e Processos Estocásticos na Economia

**João Pires da Cruz**

Dissertação orientada por:  
Professor Doutor Pedro G. Lind

Mestrado em Engenharia Física

2010



# Agradecimentos

- À Professora Doutora Guiomar Evans, amiga e colega de sempre, professora desta faculdade que num simples email me convenceu a esta tarefa e à Professora Doutora Margarida Godinho, coordenadora do mestrado, pela naturalidade como a faculdade me recebeu com um tema completamente fora da tradição;
- Aos Professores Doutores Edgar Cravo, Fernando Bastos, Vladimir Konotop, Margarida Cruz, J. Soares Augusto, Ana Nunes e Jorge Pacheco pela enorme paciência com que me ensinaram a nova Física e, particularmente aos dois últimos, a quem devo uma palavra especial pela forma anormalmente entusiasta como me apresentaram às novas aplicações da Física Estatística;
- Ao meu orientador e professor de Criticalidade, Professor Doutor Pedro G. Lind, um grande profissional de ciência, pela coragem e entusiasmo com que aceitou ser orientador de alguém substancialmente mais velho num tema completamente novo para ele e pela forma dedicada e exigente como o fez;
- Ao Fernando Matos e ao João Jarego, amigos e colegas da gestão da Closer, que suportaram o trabalho adicional que resultou desta minha tarefa;
- Às mais de 70 pessoas que trabalham na Closer e que fazem parte do impulso de fazer qualquer coisa de verdadeiramente diferente, nas pessoas do Woitek Szymankiewicz e do Álvaro Silveira cujas conversas tanto ajudaram a este trabalho;
- Ao Pedro Teixeira, colega de mestrado e de empresa, e à Margarida Fernandes pelas dicas preciosas no processamento de texto. Ao Miguel Amaral, à Inês Alves e ao Nuno Avó por ouvirem as minhas ideias durante as corridas, mesmo sem perceberem nada do que eu estava a dizer;
- Por fim, à minha mulher Elisabete, investigadora e prémio de mérito desta Universidade, por suportar as ausências, rever o texto e por colocar a fasquia ao nível da perfeição. Aos meus filhos, João e Henrique, por quem tudo isto é feito.



*In the search for the ‘guilty men’ responsible for the collapse of the global economy, one obvious group has escaped blame: the economists.... It may be true that all bankers are greedy, all politicians venal, all regulators blind and all accountants stupid. But such personal failings do not explain their behavior in the past few years. (...) We are where astronomy was when Copernicus realized that the Earth revolves around the Sun. The academic economics of the past 20 years is comparable to pre-Copernican astronomy, with its mysterious heavenly cogs, epicycles and wheels within wheels or maybe even astrology, with its faith in star signs.*

Anatole Kaletsky, Editor-at-Large, The Times, February 5, 2009





## Resumo

A ocorrência de quedas abruptas de grande amplitude nos mercados financeiros difíceis de reproduzir, segundo os modelos globalmente aceites, é um fenómeno já reportado há alguns anos[6]. No sentido de o explicar, partimos do fundamento das relações económicas entre os agentes, para construir as interacções microscópicas do sistema. Assumir este mecanismo, permite-nos abandonar o pressuposto associado aos processos estocásticos, que dominam os modelos actuais, de que a economia equivale a um sistema termodinâmico em equilíbrio, para podermos assumir que é um sistema aberto onde os diferentes agentes formam ligações entre si. Tomando em conta que os agentes económicos se organizam em redes complexas, mostramos que um sistema com tais interacções só existe num estado crítico. Consequentemente, eventos extremos de grande amplitude têm uma probabilidade não desprezável de ocorrer. Mostramos ainda que a incorporação de primeiros princípios da economia permite ao modelo reproduzir leis de potência semelhantes àquelas que são observadas nos mercados financeiros reais e que os expoentes observados dependem linearmente dos expoentes das redes complexas subjacentes. Argumentamos assim que, ao contrário de algumas correntes económicas, a economia não é um sistema fechado em equilíbrio termodinâmico, mas sim um sistema aberto num estado estacionário crítico auto-organizado.



## Abstract

The occurrence of huge drops on financial markets that are not explained by the general accepted models is a well reported phenomenon[6]. With the purpose of explaining it, we based ourselves on the reasons for an economic relation between agents to establish the microscopic interactions within the system. Assuming the existence of this mechanism, we can drop all the assumptions on which the stochastic processes that are used in the current models are based, namely that the economy is equivalent to a system in thermodynamic equilibrium, and assume that it is an open system where the different agents interact between them. Assuming that the economic agents are organized in complex networks, we show that a system with those interactions only exists in a critical state. Consequently, extreme events with large magnitude have a significant probability of occurrence. We also show that using economic first principles, our model reproduces power laws identical to those that are observed on the real markets and the observed exponents depend linearly from the exponent of the underlying complex network. We argue that, on opposition to some economic theories, the economy is not a closed system on thermodynamic equilibrium but as open system on stationary self-organized critical state.



# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O movimento browniano na economia . . . . .	2
1.2 A criticalidade auto-organizada e os índices de mercado . . . . .	3
1.3 Proposição do problema . . . . .	4
1.4 Estrutura do documento . . . . .	5
<b>2 Estado da arte</b>	<b>7</b>
2.1 Teoria Clássica Microeconómica . . . . .	8
2.2 Processos Estocásticos no Espaços Físico e Económico . . . . .	13
2.3 Redes Complexas . . . . .	23
2.4 Criticalidade Auto-Organizada . . . . .	26
<b>3 Modelo</b>	<b>37</b>
3.1 Ligação Económica e Agentes . . . . .	38
3.2 Topologia dos Agentes . . . . .	43
3.3 Comportamento Não-Linear . . . . .	44
3.4 Factor de conversão de trabalho (preço) . . . . .	46
3.5 Condição de Criticalidade . . . . .	47
3.6 Topologia e Dimensão da Avalanche . . . . .	50
3.7 Implementação Computacional . . . . .	51
<b>4 Resultados</b>	<b>53</b>
4.1 Mercados Reais . . . . .	53
4.1.1 ALLORDS . . . . .	55
4.1.2 CAC . . . . .	57
4.1.3 DAX . . . . .	59
4.1.4 DJIA . . . . .	61
4.1.5 FTSE . . . . .	63
4.1.6 HSI . . . . .	65
4.1.7 NIKKEI . . . . .	68

4.1.8	CBOE IR10Y . . . . .	70
4.2	Modelo Computacional . . . . .	72
4.2.1	Topologia . . . . .	72
4.2.2	Série sem amostragem . . . . .	73
4.2.3	Série com amostragem . . . . .	74
4.3	Resumo dos Resultados . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Discussão e conclusões</b>	<b>77</b>
5.1	Discussão dos Resultados . . . . .	77
5.2	Conclusões . . . . .	78
5.3	Trabalho Futuro . . . . .	80

# Lista de Figuras

3.1	Ligação Económica . . . . .	38
3.2	Esquema da Rede Económica . . . . .	40
3.3	Evolução DJIA (dados obtidos de Google Finance e US Bureau of Labor Statistics) . . . . .	42
3.4	Diagrama de objectos . . . . .	51
4.1	Dados da série temporal do índice ALLORDS. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . .	55
4.2	Variação diária do índice ALLORDS em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	55
4.3	Variação orientada ao evento do índice ALLORDS em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	56
4.4	ALLORDS Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.42$ ; $R^2 = 0.99$ ; $t = -35$ . . . . .	56
4.5	Dados da série temporal do índice CAC. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . .	57
4.6	Variação diária do índice CAC em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	57

- 4.7 Variação orientada ao evento do índice CAC em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . . 58
- 4.8 CAC Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.92$ ;  $R^2 = 0.96$ ;  $t = -17$ . . 58
- 4.9 Dados da série temporal do índice DAX. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . . 59
- 4.10 Variação diária do índice DAX em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . . 59
- 4.11 Variação orientada ao evento do índice DAX em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . . 60
- 4.12 DAX Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.6564$ ;  $R^2 = 0.96$ ;  $t = -17$ . 60
- 4.13 Dados da série temporal do índice DJIA. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . 61
- 4.14 Variação diária do índice DJIA em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . . 61
- 4.15 Variação orientada ao evento do índice DJIA em comparação com a gaussiana . Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . . 62
- 4.16 DJIA Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.83$ ;  $R^2 = 0.99$ ;  $t = -35$ . 62
- 4.17 Dados da série temporal do índice FTSE. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . 63



4.18	Variação diária do índice FTSE em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	63
4.19	Variação orientada ao evento do índice FTSE em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	64
4.20	FTSE Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.75$ ; $R^2 = 0.98$ ; $t = -26$ . . . . .	64
4.21	Dados da série temporal do índice HSI. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . .	65
4.22	Variação diária do índice HSI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	65
4.23	Variação orientada ao evento do índice HSI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	66
4.24	HSI Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.31$ ; $R^2 = 0.98$ ; $t = -35$ . . . . .	66
4.25	Dados da série temporal do índice NIKKEI. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . .	68
4.26	Variação diária do índice NIKKEI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	68
4.27	Variação orientada ao evento do índice NIKKEI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	69
4.28	NIKKEI Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.73$ ; $R^2 = 0.98$ ; $t = -24$ . . . . .	69

4.29	Dados da série temporal do índice CBOE IR10Y. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula. . . . .	70
4.30	Variação diária do índice CBOE IR10Y em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	70
4.31	Variação orientada ao evento do índice CBOE IR10Y em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas. . . . .	71
4.32	CBOE IR10Y Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.78$ ; $R^2 = 0.98$ ; $t = -26$ ). . . . .	71
4.33	Dinâmica da distribuição da conectividade (log-log) dos nós. . . . .	72
4.34	Modelo - Energia em função do ciclo de programa . . . . .	73
4.35	Modelo - Distribuição das variações de energia . . . . .	74
4.36	Modelo - Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.45$ ; $R^2 = 0.998$ . . . .	74
4.37	Modelo - Distribuição das variações de energia . . . . .	75
4.38	Modelo - Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ). $m = -2.24$ ; $R^2 = 0.97$ . . . . .	75
4.39	Resumo dos expoentes das leis de potência. . . . .	76
5.1	Diagrama de Fases da Economia - A fase I representa a fase de crescimento infinito e a fase II a fase em que as ligações são destruídas à medida que são criadas. A forma da curva de transição é meramente ilustrativa. . . . .	78

# Capítulo 1

## Introdução

No fim do século XX, início do século XXI, as sociedades de investimento norte-americanas resolveram titularizar os créditos hipotecários atribuídos a clientes que não reuniam as condições de entrarem no esquema federal de créditos hipotecários, os que tinham *score* abaixo de *prime* ou, na linguagem do mercado, *subprime*. O instrumento financeiro resultante recebeu das agências de rating a notação máxima de qualidade de crédito (mínimo de risco). O racional associado era relativamente simples, os dados experimentais mostravam que a probabilidade do mercado imobiliário descer era próxima de zero. Como, no caso de incumprimento dos credores, as casas revertiam para os veículos de titularização (as empresas detentoras dos créditos), então no evento de incumprimento a probabilidade de perda tendia para zero.

Matematicamente, era impossível perder dinheiro e, assim, as agências classificavam os títulos emitidos pelos veículos de titularização de acordo com aquilo que a matemática lhes dizia. Esta ‘impossibilidade’ fez com que os bancos do mundo inteiro adquirissem estes títulos e, com isso, libertavam-se mais fundos para emprestar para a compra de mais casas. O preço do imobiliário subia com o acréscimo de procura e a probabilidade de descida era cada vez mais baixa.

Mas os credores não tinham capacidade de pagar e um dia deixaram de o fazer. As casas, como previsto, reverteram para os veículos de titularização que as colocaram à venda. Como cada vez havia mais casas colocadas à venda, aconteceu o matematicamente impossível - o preço do imobiliário baixou. O resto da história ainda é vivida no dia de hoje e foi baptizada como a crise do *subprime*. O seu impacto foi de tal magnitude que mesmo os títulos associados aos créditos *prime* necessitaram da ajuda federal.

Começámos com a história do subprime para descrever o fenómeno da *focagem*. Se, por hipótese, se tivesse perguntado a alguém completamente ignorante acerca

do mercado imobiliário norte-americano qual a distribuição de probabilidade das variações no preço, a resposta seria algo como uma distribuição plana, em que todos os eventos seriam igualmente prováveis porque a ignorância da mecânica subjacente o levaria a isso. Essa ignorância, levaria a uma percepção do risco envolvido muito mais rigorosa do que aquela que existiu e o impacto seria muito menos gravoso que aquele que foi. A razão prende-se com o facto de o conhecimento sobre a mecânica subjacente à curva do mercado, no caso da distribuição empírica e no caso da distribuição plana, ser igual, ou seja, nenhum. A utilização do conhecimento empírico existente, do histórico da evolução do imobiliário, associada à presunção da validade das ferramentas matemáticas envolvidas cavou a crise, porque o foco dos agentes não estava no risco real, mas em aspectos laterais. A história da utilização de processos estocásticos em finanças é uma história semelhante. Uma história em que é completamente ignorada a mecânica das ‘partículas’ do sistema. E esta tese tenta dar um contributo no sentido contrário.

## 1.1 O movimento browniano na economia

Quando, em 1973, os processos estocásticos foram introduzidos no mundo das finanças por intermédio dos trabalhos de Black, Scholes[1] e Merton[2] (BSM) para a valorização de opções europeias, mais que a introdução de uma forma de encontrar um justo valor para aquele tipo de instrumentos financeiros, criou-se uma verdadeira área do conhecimento suportada no modelo do movimento browniano geométrico e, consequentemente, nos seus pressupostos. O modelo, que era originalmente aplicado ao comportamento dos preços em mercado organizado, usa a analogia entre a influência das transacções na formação do preço e os choques da partícula Browniana com as partículas do banho e, assim, o preço de algo no mercado organizado segue uma dinâmica expressa por

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (1.1)$$

em que  $S$  é o preço,  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, o drift e a volatilidade, e  $dW$  representa um processo de Wiener. Apesar de os próprios autores reconhecerem alguma elasticidade nos pressupostos, o sucesso deste modelo deveu-se, no essencial, à sua aceitação crescente no mercado, resultante da entrada dos físicos na banca de investimento nos USA, por sua vez provocada pelo fim da guerra fria e consequente declínio da indústria militar. Essa aceitação fez com que a dinâmica da oferta e da procura fosse influenciada pela valorização das opções pelo modelo BSM e, no final, o valor de mercado coincidissem com o valor determinado pelo modelo. Ora, isto leva a uma validação errónea do modelo, isto é, o mercado aceita o modelo porque coincide com o mercado, mas só coincide porque o mercado aceita o modelo. A consequência desta validação errónea é conhecida porque deu origem a uma crise financeira resultante da falência de uma gestora de fundos chamada Long Term Capital Management em

## 1.2. A CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA E OS ÍNDICES DE MERCADO 3

1998, da qual Scholes e Merton eram administradores, que obrigou os reguladores norte-americanos a intervirem.

Independentemente da validade do modelo BSM, o facto é que a analogia entre a evolução de preços em mercado organizado e o movimento de uma partícula browniana vingou e estendeu-se da formação de preços em mercado organizado para a determinação do risco de crédito[35], para a evolução dos índices do próprio mercado e, consequentemente, para a gestão de fundos de investimento, arrastando para quase todos os domínios da finança os pressupostos que estão subjacentes à assumpção da analogia. Isto é, os pressupostos que estão subjacentes ao próprio movimento browniano, particularmente o de que o processo estocástico é markoviano e estacionário dentro de um ‘banho’ bem comportado.

## 1.2 A criticalidade auto-organizada e os índices de mercado

Desde os trabalhos de Mandelbrot[6] nos anos 50 e 60, sobre o comportamento do mercado de algodão nos USA que se sabe que o comportamento dos índices representativos de mercados organizados não pode seguir uma dinâmica análoga ao movimento browniano, porque as amplitudes das variações dos preços não são coerentes com a segunda parcela da equação (1.1), visto que observações indicam[33, 24, 23, 18] que as variações seguem uma lei de potência e não um padrão gaussiano (na realidade, o trabalho de Mandelbrot é anterior ao de BSM, pelo que a questão não se colocava na altura). Entre as correntes mais ligadas à analogia do movimento browniano, tal incoerência deve-se apenas ao facto dos coeficientes  $\mu$  e  $\sigma$  não serem constantes e que isso nos deve levar a uma forma mais genérica de processo estocástico ([32], por exemplo). Mas estas abordagens assumem ainda como pressuposto que estamos perante um processo markoviano num sistema em equilíbrio termodinâmico e sem tomar qualquer consideração acerca da mecânica que está subjacente às variações dos preços.

Neste trabalho estamos interessados no comportamento de índices bolsistas principais, isto é, num indicador que seja representativo da percepção dos agentes sobre economia envolvente do mercado organizado em causa ou, se quisermos usar a linguagem que usámos até aqui, do ‘banho’ onde as acções estão ‘mergulhadas’. Um índice bolsista é uma carteira fictícia de acções que, de alguma forma, é entendida, por quem a organiza e pelo mercado em geral, como representativa do estado geral das empresas cotadas nesse mercado. Neste sentido, o índice bolsista principal é uma combinação linear de valores de algumas acções cotadas em que os coeficientes são quantidades escolhidas para que cada uma das acções reflecta a sua importância no

mercado de acções.

Ao contrário do que é crença comum, os mercados de capitais não têm índices. Os índices são definidos, normalmente, por entidades externas a esse mercado (S&P 500 é determinada pela Standard & Poors, o DJIA pelo Wall Street Journal, o FTSE pelo Financial Times, etc.) e há vários índices publicados sobre cada mercado, uns sectoriais, outros gerais. Aqueles em que nos focamos são os mais aceites pelo mercado em geral por serem aqueles que melhor traduzem esse mesmo mercado.

### 1.3 Proposição do problema

Sendo um índice bolsista principal um indicador do estado do mercado de capitais como um todo, ele é, também, um indicador da percepção dos agentes económicos da saúde financeira e económica das empresas, da sua capacidade de financiamento, do seu poder produtivo, da sua capacidade de venda, ou seja, do estado da economia que essas empresas representam. No essencial, os índices principais são indicadores, não só do mercado de acções, como também da economia onde essas empresas operam, mas mais: são um indicador da economia presente e da evolução que os agentes intervenientes percebem para essa economia. Por isso, têm uma volatilidade que os outros indicadores macroeconómicos não têm e representam uma quantidade de informação muito maior.

Em suma, sendo os índices bolsistas principais algo que está intimamente ligado aos mercados de acções, eles representam toda a economia que está subjacente ao mercado e é nesse sentido que nós os usaremos neste trabalho.

Por uma questão de utilidade, o nosso trabalho vai focar-se nas quedas dos índices uma vez que é destas que as medidas de risco dependem. Por isso, quando falamos em analisar o comportamento do índices falamos quase sempre na distribuição das quedas e não do seu crescimento. Não porque pensamos serem independentes, pelo contrário, mas porque a modelização do crescimento de forma a poder ser comparada com os dados experimentais retirados dos mercados reais não está no âmbito deste trabalho por não fornecer qualquer leitura útil em termos de medida de risco.

A título de ressalva, não vamos aqui questionar se a abordagem BSM ao comportamento de activos individuais é válida, quer estes tenham uma grande liquidez ou não. Naturalmente, o comportamento individual dos activos transaccionados em mercado organizado não é independente do comportamento do mercado como um todo ou, por outras palavras, da economia envolvente, tal como o comportamento da partícula browniana não é independente da evolução térmica do banho, dos potenciais a que

está sujeito ou da existência de variações na densidade do banho. Mas aquilo que vamos modelar aqui não deve ser transposto para o comportamento individual dos activos, da mesma forma que aquilo que se modela para o conjunto dos átomos de um fluído não deve ser aplicado ao estudo de um átomo desse fluído em particular.

Para explicar o comportamento dos índices bolsistas principais enquanto índices macroeconómicos vamos abandonar os pressupostos a que uma explicação baseada em passeios aleatórios ou movimentos brownianos está assente. Vamos explicar que pressupostos são esses e porque é que não se verificam num ambiente económico. Não vamos tentar explicar uma curva qualquer enquanto uma curva qualquer, mas vamos entender o que essa curva significa e procurar a mecânica que lhe está subjacente. Para tal, vamos entender a razão da existência de uma economia e como ela é gerada pela biologia do ser humano. Vamos recorrer aos primeiros princípios da teoria microeconómica, da lei da oferta e da procura, para construir os nossos modelos computacional e analítico, em que cada agente económico é levado a criar ligações económicas usando energia do meio ambiente. Com base nestes princípios, e abandonando aqueles que são característicos de um sistema termodinâmico em equilíbrio, mostramos que a economia só existe enquanto sistema crítico auto-organizado, em que o expoente característico da lei de potência da magnitude das quedas depende linearmente do expoente característico da topologia de organização dos agentes económicos, e que os dados experimentais são coincidentes com os modelos que construímos.

## 1.4 Estrutura do documento

No capítulo seguinte faremos uma descrição do estado da arte que usamos nesta dissertação, nos quatro campos do conhecimento envolvidos. No capítulo 3 descreveremos o modelo que usámos como aproximação ao modelo microeconómico para entender como o comportamento conjunto das ligações microeconómicas se traduzem em termos macroscópicos e encontramos a condição de criticalidade do modelo, acima do qual e abaixo do qual não existe economia. No capítulo 4 veremos os resultados do modelo computacional e da análise que foi efectuada por nós aos dados experimentais retirados de algumas bolsas internacionais mais relevantes. No capítulo 5, discutiremos os resultados obtidos e faremos as conclusões.





## Capítulo 2

### Estado da arte

Nesta secção faremos a descrição do actual estado do conhecimento relativamente aos propósitos do trabalho, o que nos leva a domínios muito diferentes do conhecimento como Economia, Física Estatística, Finanças Quantitativas, Criticalidade e Sistemas Complexos. O nosso objectivo é mostrar que os pressupostos nos quais se baseiam os modelos assentes em processos estocásticos não são satisfeitos na economia e que esta se comporta como um sistema num estado estacionário crítico. Com este intuito, vamos focar-nos naquilo que é o fundamental da teoria clássica microeconómica e dos processos estocásticos, porque é nos fundamentos que se entende se os pressupostos que tornam as teorias válidas são satisfeitos, ou não, pelos sistemas que estudamos. Assim, não vamos entrar em detalhe pelas aplicações dos processos estocásticos em finanças quantitativas porque, para os nossos objectivos, nos basta compreender os pressupostos em que se baseiam para demonstrar que não se verificam e que a experiência mostra exactamente isso. Pelo que, atendendo que esta é uma tese na área da Física, descreveremos muito sucintamente uma das aplicações onde o impacto social da assumpção da validade dos pressupostos é maior - a medida regulamentar de risco de crédito. Como referência, tomaremos duas das obras mais importantes para a aprendizagem da importância dos processos estocásticos nas finanças quantitativas[40, 15] que incluem desde a gestão de fundos de pensões e de fundos de investimento, até à evolução de níveis de liquidez.

No que diz respeito aos domínios da Criticalidade e dos Sistemas Complexos, estamos a falar de domínios do conhecimento muito recentes relativamente à microeconomia ou aos processos estocásticos, e cujo estado da arte é substancialmente mais ‘atomizado’ por lhe faltar a filtragem que o tempo faz entre o que é conhecimento importante e aquilo que é mera especulação sem aplicação prática. Neste sentido, vamos focar-nos no que é essencial para a compreensão do nosso modelo, sem entrar em inventariações do conhecimento.

## 2.1 Teoria Clássica Microeconómica

A língua portuguesa é particularmente pouco feliz para o tratamento do assunto a que se refere esta parte do texto. *Economia*, com ‘E’ maiúsculo, refere-se ao saber científico, à ciência social que estuda a *economia*, com ‘e’ minúsculo, que representa aquilo que a ciência social estuda. Temos, também, *economia* como sinónimo de poupança ou organização. Aquilo que nos interessa neste documento é o segundo sentido, ou seja, o sistema de relações humanas que deu origem às trocas comerciais de bens e serviços, ao dinheiro, às relações laborais e a todos os objectos funcionais que hoje associamos naturalmente à palavra *economia* e que é assunto de milhares de publicações técnicas e secções de jornais[13].

No entanto, apesar das inúmeras vezes que, ao longo do dia, somos ‘atingidos’ pela palavra *economia* não é fácil encontrar - nem mesmo nas mais prestigiadas obras académicas - a resposta à pergunta ‘*Porque existe economia?*’. Nem nas sociedades animais, nem nas sociedades humanas primitivas, ela existe. Historicamente[31], a economia começou com a revolução agrícola, quando o ser humano primitivo entendeu que conseguiria sobreviver no mesmo local sem se deslocar.

A economia resulta da vantagem competitiva daquilo a que os economistas chamam de *especialização do trabalho* face à auto-suficiência universal. As sociedades humanas em que as diferenças dos seus elementos eram aproveitadas em funções diferentes, eram mais eficientes do que as sociedades em que cada elemento teria que realizar todas as tarefas necessárias à sua própria sobrevivência[31]. Primeiro, porque a especialização levava a uma melhor realização por parte dos elementos mais adequados e, depois, porque a realização por parte dos elementos mais adequados levava ainda a uma maior especialização. Mas esta especialização teria que ser acompanhada por trocas, porque quem só produz uma coisa tem que recorrer aos outros para obter aquilo de que necessita e que resulta do trabalho realizado pelos outros elementos da sociedade e, daí, a existência de uma economia. A economia é, então, o resultado da evolução humana para um estado mais eficiente de sobrevivência e representa o conjunto de trocas entre elementos que realizam um trabalho, aqui visto enquanto trabalho económico (labor) e não trabalho físico (work) diferenciado.

As trocas de bens e serviços nas sociedades primitivas ocorriam mediante acordos entre vizinhos por mútuo acordo. Mas um sistema dotado de economia, para além de ser mais eficiente, tem também a propriedade de ser propenso ao crescimento, uma vez que cada elemento não está focado na auto-suficiência mas sim na efectuação de trocas para garantir a sua sobrevivência. Isto provocou o aparecimento de formas de centralização das trocas em locais de encontro chamados *mercados*, evoluindo até à expressão actual de *economia de mercado* para nos referirmos a uma sociedade em

que elementos especializados, em certas actividades produtivas, encontram resposta às suas necessidades materiais através de trocas voluntárias, acordadas entre as partes envolvidas. O conceito de mercado foi-se alargando à medida que os constrangimentos de comunicação entre os agentes económicos do planeta foram desaparecendo. Por exemplo, o trigo produzido em qualquer lugar do mundo pode ser comprado em qualquer lugar do mundo e o seu preço tende a ser uniforme no mundo inteiro. Quando falamos de mercado de trigo já não falamos de um local onde os elementos da sociedade especializados na produção de trigo vão satisfazer as suas necessidades materiais, mas num ambiente abstracto onde as ligações económicas entre os elementos são facilitadas.

Os conceitos de transacção e de mercado são os objectos da mecânica associada à economia. A transacção, ou ligação económica, é algo que ocorre, não porque os elementos do sistema são considerados iguais, mas porque são diferentes. Este detalhe de fundamento justifica, do ponto de vista matemático, a agregação da ligação, mas não do elemento. A ligação é a unidade fundamental do sistema economia - a molécula do gás económico - e isto leva-nos à mais bem sucedida das teorias económicas, a Teoria Microeconómica ou Microeconomia Neoclássica, um esquema dedutivo que parte de pressupostos e retira consequências lógicas<sup>1</sup>, embora pouco compreendida entre os economistas mais empiristas[13]. A Microeconomia Neoclássica analisa a economia com base na ligação entre dois tipos de agente, os consumidores e os produtores, sendo que para o modelo microeconómico funcionar cada agente tem que ser, simultaneamente, consumidor e produtor.

Não é fácil encontrar uma explicação única da Teoria Microeconómica, mas é particularmente difícil encontrar um autor que a descreva sem procurar pequenos casos particulares que podem violar os fundamentos e, assim, tirar valor à teoria. Por isso, antes de iniciarmos a explicação da teoria, devemos entender que ela é um modelo que, para explicar o comportamento de um sistema, parte das relações microscópicas entre os constituintes desse sistema. Assim, é natural que existam desvios entre a realidade microscópica e o modelo microscópico mas sem impacto no comportamento agregado, como acontece com os modelos da física estatística ou da termodinâmica. Por exemplo, um modelo de gás ideal não considera os choques inelásticos, a adsorção de moléculas nas superfícies do recipiente ou aquelas que estas libertam para o gás porque, no agregado, esses detalhes perdem relevância face ao conjunto de fenómenos dominantes. Da mesma forma, olharmos para uma economia e dizermos que um agente económico pode não consumir em função da sua necessidade, é um detalhe microscópico sem relevância ao nível macroscópico e, como estamos a olhar para modelos económicos, é mais fácil encontrar exemplos do dia-a-dia que possam violar os

---

<sup>1</sup>Em Economia isto pode não ser considerado inteiramente positivo como acontece nas ciências naturais.

pressupostos do modelo. A teoria tem falhas, sim, e é delas que esta dissertação trata, mas tem falhas na mecânica microscópica subjacente que são muito relevantes ao nível macroscópico, não porque existem casos particulares irrelevantes. Por isso, optámos pela explicação da teoria microeconómica no seu fundamento[10] que deriva de Léon Walfrás, o matemático francês considerado o pai da teoria microeconómica, e inspirada no modelo do Equilíbrio Económico Geral de John von Neumann[36] por ser, exactamente, um esquema dedutivo que alguém com bases de física estatística consegue seguir sem se preocupar com os casos irrelevantes.

Dois conceitos são essenciais para entender os fundamentos da Teoria Microeconómica, o conceito *commodity*<sup>2</sup> e o conceito *preço* que, sendo conceitos facilmente confundíveis com conceitos que ouvimos todos os dias, vamos necessitar de conceitos adicionais para a sua definição. Para entendermos estes conceitos, vamos introduzir as dimensões tempo e espaço. Vamos considerar que a actividade económica ocorre em intervalos de tempo discretos, tão pequenos quanto se possam considerar discerníveis. Analogamente, consideramos que essa actividade ocorre numa dada região homogénea do espaço, tão pequena quanto possa ser discernível do ponto de vista de análise. E, para chegarmos aos conceitos essenciais, vamos passar por dois conceitos mais familiares, os conceitos *bem* e *serviço*. Um bem é um objecto económico completamente definido pelas suas propriedades estáticas, como um kWh de energia eléctrica ou um litro de trigo roxo de calibre 2 e que se transacciona em quantidades, que são números reais não negativos. Um serviço é um objecto económico representativo de uma alocação de recursos definida no tempo, como o uso de um camião ou o arrancar de um dente, e exprime-se pela quantidade de tempo ou pela actividade que é realizada. Tendo estabelecido os conceitos bem e serviço, sabemos que estes não representam economicamente a mesma coisa hoje que representaram ontem, ou vão representar daqui a uma semana, isto é, o seu papel na economia é diferente.

Define-se como *commodity* o objecto económico que encapsula não só o bem ou o serviço, como também o instante e o local onde é disponibilizado. Na altura em que a teoria foi desenvolvida, o local era uma dimensão muito importante do problema, até porque associada à dimensão de local está o conceito de moeda (*currency*). Hoje, a questão do local perdeu muita da sua importância devido ao levantamento dos constrangimentos comunicacionais.

Define-se como o espaço das *commodities* o espaço em  $\mathbb{R}^l$  onde podemos definir estrutural, temporal e espacialmente um número  $l$ , finito, de *commodities* distinguíveis, em que cada coordenada do vector representa uma quantidade. Assim, com auxílio do espaço das *commodities*, uma acção de um agente económico consiste na especificação

---

<sup>2</sup>Não existe uma tradução para *commodity* no sentido em que a usamos aqui, nem nos julgamos capazes de introduzir uma, pelo que mantemos a expressão original do autor.

das quantidades de *commodities* que lhe serão disponibilizadas ou disponibilizadas por ele, os seus *inputs* e *outputs*, como um vector no espaço das *commodities*.

Do ponto de vista da Teoria Microeconómica, os agentes dividem-se em duas classes mediante o papel que assumem na economia, os consumidores e os produtores. Aos produtores cabe o papel de criarem *commodities* e aos consumidores o papel de as usar por um determinado *preço*. Os conceitos preço e dinheiro são completamente díspares, pelo que não devemos pensar em preço como uma quantidade em unidades monetárias. Historicamente, o dinheiro surgiu muito depois da economia, pelo que é possível que esta funcione sem aquele e, nos dias de hoje, o dinheiro é algo que nem precisa de se materializar para existir economia. Portanto, quando falamos de preço não falamos de dinheiro. Preço é apenas uma quantidade de trabalho entregue pelo consumidor ao produtor em troca de uma *commodity*.

Focando nos produtores, um produtor é um agente económico cujo papel é executar um plano de produção ou, mais simplesmente, uma produção, e assume-se que existe um número grande, finito, de produtores. Para o produtor  $j$ , um plano de produção é a especificação das quantidades de todos os seus *inputs* e todos os seus *outputs*, em que se convencionou que o sinal dos *inputs* é positivo. Então a produção, sendo um caso particular da acção, é representado por um ponto  $\vec{y}_j$  no espaço  $\mathbb{R}^l$ . Como existem vários planos de produção passíveis de ser seguidos pelo produtor  $j$ , chama-se ao conjunto dos  $\vec{y}_j$  possíveis o *set* de produções e *oferta* à soma sobre todos os produtores  $\vec{y} = \sum \vec{y}_j$ .

No espaço das *commodities* pode ainda definir-se um vector  $\vec{p}$  que designamos por sistema de preços e, com este, podemos estabelecer que o proveito do produtor  $j$ , com um plano de produção  $\vec{y}_j$ , no sistema de preços  $\vec{p}$ , é dado pelo produto interno  $\vec{p} \cdot \vec{y}_j$  e o proveito total é dado pela soma dos proveitos de cada um dos produtores. Como as *commodities* têm incorporadas a noção de tempo, os proveitos correspondem à noção financeira de valor presente. Como pressuposto de toda a teoria microeconómica, o sistema de preços apresenta-se ao produtor como um dado, porque a sua actividade económica é, por definição, pequena face ao total da economia. Perante um sistema de preços dado, assume-se que o produtor tenta maximizar o seu proveito escolhendo do *set* de produção o plano que vai ao encontro do objectivo. Este plano é designado por plano de equilíbrio do produtor  $j$  relativamente a  $\vec{p}$ . Repare-se que o pressuposto de que a actividade económica do produtor é pequena face à actividade económica global, oculta um pressuposto de topologia da rede de ligações económicas, uma organização aleatória dos agentes em que a probabilidade destes se ligarem entre si é aproximadamente igual para cada agente. Na realidade, tal não é verdade, uma vez que se sabe existirem mecanismos de *ligação preferencial* como veremos mais à frente, o que significa que existem produtores cuja actividade económica não pode ser

considerada pequena face ao total.

Outra classe de agentes, como anteriormente referido, são os consumidores. Como no caso dos produtores, o papel dos consumidores é executar um plano de consumo que é caracterizado pelas limitações que incidem na sua escolha. De acordo com a Teoria Microeconómica e com o princípio de equilíbrio económico geral de von Neumann[36], o plano de consumo não pode exceder a sua riqueza. Se tivermos como convenção que os inputs são números positivos e os outputs números negativos, o plano de consumo é, à semelhança do plano de produção, um vector no espaço das *commodities* em  $\mathbb{R}^l$ ,  $\vec{x}_i$ . Ao conjunto de todos os planos de consumo possíveis chamamos de *set* de consumo e à soma de todos os planos de consumo de todos os consumidores chamamos de *procura*. Se no caso dos produtores estes tentam maximizar o proveito, os consumidores tentam maximizar a utilidade, ou satisfação, em função da sua riqueza. E, tal como aos produtores, aos consumidores o sistema de preços também surge como um dado porque, como pressuposto, o seu consumo individual é muito pequeno face ao total. Ou seja, existe um plano de consumo  $\vec{x}_i$ , que no sistema de preços  $\vec{p}$  e perante a limitação imposta ao consumidor pela sua riqueza, é aquele que lhe dará a maior satisfação ou utilidade. Na definição dos consumidores temos novamente subjacente uma topologia aleatória que veremos não ser verdadeira, mas também um princípio de equilíbrio dentro de condições fronteira de riqueza, o que modela o sistema económico como um sistema físico fechado em equilíbrio onde os agentes económicos não podem, de acordo com o modelo, experimentar as fronteiras, à semelhança de moléculas dentro de reservatórios fechados. Como veremos mais à frente estes pressupostos não se verificam e, ao contrário da economia se poder modelar como um sistema fechado em equilíbrio, tudo indica que seja um sistema aberto permanentemente fora do equilíbrio.

De forma a chegar, finalmente, ao ponto central da Teoria Microeconómica, falta-nos apenas introduzir o conceito total recursos, que representa a quantidade disponível, *a priori*, de cada *commodity* e é, também, um vector no espaço  $\mathbb{R}^l$  que representamos por  $\vec{w}$ . Então, economia é um objecto que encapsula um conjunto não vazio  $Y_j$  em  $\mathbb{R}^l$  de planos de produção possíveis para cada produtor  $j$ , um conjunto não vazio de  $X_i$  em  $\mathbb{R}^l$  de planos de consumo para cada consumidor  $i$  e um ponto  $\vec{w}$  em  $\mathbb{R}^l$ . Um estado da economia é um tuplo  $\{\{\vec{x}_i\}, \{\vec{y}_j\}\}$  e chama-se a  $\vec{x} - \vec{y}$  a procura líquida. Quando calculamos a procura líquida, cancelamos a transferência de *commodities* entre agentes. Como as procuras líquidas são aditivas, existe uma procura líquida total de todo o sistema económico  $\vec{x} - \vec{y}$  e, dado um estado da economia  $\{\vec{x}_i, \vec{y}_j\}$ , o ponto  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} - \vec{w}$  representa um excesso de procura (que pode eventualmente ter todas as coordenadas negativas). Um estado da economia é acessível ou, na terminologia de von Neumann hoje aceite, está em equilíbrio geral se  $\vec{z} = \vec{0}$ . Esta é, em termos formais, a expressão da normalmente designada Lei da Oferta e da Pro-

cura. O modelo de von Newmann tem ainda a nuance interessante, que adoptaremos mais à frente, de não fazer a separação entre consumidores e produtores, assumindo que todo o consumo se destina a produzir.

Resumindo, temos então um conjunto de agentes que tentam maximizar o proveito da sua produção, e um conjunto de agentes que tentam maximizar a utilidade do seu consumo, num dado sistema de preços, sendo este o ponto comum aos dois processos de optimização e, daí, o princípio comum aceite de que os preços são o resultado da lei da oferta e da procura. Uma variação no sistema de preços acaba por obrigar a novos processos de optimização dos proveitos e das utilidades, dando origem à noção de equilíbrio. Repare-se que há um processo ‘termodinâmico’ na definição do preço, que alguns economistas entendem como uma falha do modelo devido à ‘centralização’ daquela[13], mas que os físicos estatísticos entenderão sem dificuldade que não existe qualquer limitação neste ponto. O facto de cada uma das unidades do sistema contribuir para a definição macroscópica de um preço, que acaba por influenciar o seu próprio comportamento microscópico, é o comportamento de qualquer sistema de muitas partículas.

A ideia de equilíbrio entre a oferta e a procura, numa topologia de rede aleatória, num sistema fechado de muitas partículas, induz um aproveitamento do conhecimento da termodinâmica para o estudo de fenómenos macroscópicos resultantes da interacção entre os constituintes microscópicos, como é o caso do comportamento dos índices bolsistas principais. Na secção seguinte vamos focar-nos na forma como os modelos usados em finanças quantitativas incorporam estas ideias, embora, como veremos, a experiência mostra que tal ideia não têm aderência à realidade.

## 2.2 Processos Estocásticos no Espaços Físico e Económico

Quando, em 1905, Einstein[11] conseguiu relacionar uma métrica macroscópica, o coeficiente de viscosidade de um fluído, com uma medida microscópica de difusão, introduziu o domínio da física estatística como meio de conseguir explicar a fenomenologia associada à agregação de vários objectos. Com isso, abriu uma porta para se adaptar a explicação de um agregado de objectos físicos a um agregado de objectos económicos (ou um qualquer agregado). Essa porta foi aproveitada por Black e Scholes[12] e Merton[25], em 1973, na sua formulação do valor justo de um instrumento financeiro derivado, designado por opção de compra europeia, quando assumiram que o valor do activo subjacente à opção seguia uma dinâmica semelhante àquela que foi usada por Einstein.

Com o sucesso da aplicação do modelo de valorização de opções, que ficou conhecido como Black-Scholes, aos mercados accionistas a partir dos anos 90 do séc. XX, foi-se desenvolvendo na área das finanças quantitativas um vasto enquadramento teórico, prático e regulatório, baseado na analogia entre os processos estocásticos definidos no domínio da física estatística e o comportamento de variáveis macroscópicas no espaço económico. Nesta secção, vamos focar-nos nos fundamentos e pressupostos que estão associados aos processos estocásticos no domínio da física estatística e descrever a forma como são passados para o domínio da economia e finanças, tal como são geralmente aceites hoje e naquilo que é relevante para as finanças quantitativas.

Seja então  $x$  uma quantidade passível de flutuação num sistema termodinâmico[37] e vamos assumir que é função das variáveis microscópicas do espaço fase do sistema, ou seja,  $x \equiv x(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$ . Suponhamos ainda que o sistema termodinâmico está isolado, ou seja, a energia, o número de partículas e o volume são constantes ( $E, N, V$ ) e queremos saber a distribuição da probabilidade  $w(x)$  das flutuações de  $x$ . Usando a interpretação estatística de entropia, representamos a entropia na realização  $x$  sob as condições  $E, N, V$ , como

$$S(x|E, N, V) = k_B \ln(\Omega(x|E, N, V)) \quad (2.1)$$

em que  $\Omega(x|E, N, V)$  é o número de estados associados numa realização  $x$  sob condições  $E, N, V$ . A probabilidade de realização de  $x$  é dada por

$$\omega(x|E, N, V) = \frac{\Omega(x|E, N, V)}{\Omega(E, N, V)} \quad (2.2)$$

$$\omega(x) = e^{-\frac{1}{k_B}(S(x|E, N, V) - S(E, N, V))} \quad (2.3)$$

se designarmos por  $x_0$  o valor da quantidade  $x$  no equilíbrio, sabemos que a entropia tem um máximo nesse ponto, pela 2ª lei da termodinâmica. Com base nisto, expandimos  $S(x) \equiv S(x|E, N, V)$  em torno de  $x_0$

$$S(x) = S(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x - x_0)^2 \quad (2.4)$$

com

$$\beta = \frac{1}{k_B} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=x_0} > 0 \quad (2.5)$$

que resulta, de uma forma muito simples, em

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta(x-x_0)^2} \quad (2.6)$$



Ou seja, as flutuações em torno de estados de equilíbrio são gaussianas com desvio padrão determinado pela segunda derivada de entropia em torno do ponto de equilíbrio. Para outras quantidades termodinâmicas, pode ser encontrada uma forma análoga de lá chegar, sendo  $\beta$  a segunda derivada positiva do potencial termodinâmico em causa. Sublinhe-se aqui a importância de estarmos próximos do equilíbrio termodinâmico para chegar à forma gaussiana da amplitude da flutuação, porque só isso justifica o facto da primeira derivada de entropia ser nula e desprezarmos os termos de ordem superior a 3.

Com base neste pressuposto e procurando confirmar a natureza atómica da matéria, Einstein[11] explicou a agitação de uma partícula em suspensão num líquido, hoje conhecido como *movimento browniano*. Assume-se que uma partícula relativamente grande face às partículas do fluido onde está imersa, chamada partícula browniana, é muito mais lenta que aquelas e, como resultado, experimenta choques rápidos derivados de flutuações na densidade do fluido[21]. Então, podem-se escrever as equações do movimento da partícula browniana, assumindo que está livre de potencial, como

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{1}{m}\xi(t) \quad (2.7)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (2.8)$$

onde  $x(t)$  e  $v(t)$  são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula browniana de massa  $m$ ,  $\gamma$  é o coeficiente de viscosidade e  $\xi(t)$  é a componente dinâmica que representa as flutuações na densidade do fluido, também conhecida por *força de Langevin*. Estas equações, (2.7) e (2.8), designam-se por equações de Langevin do movimento da partícula browniana.

A força de Langevin  $\xi(t)$  é um termo novo relativamente à mecânica da partícula isolada e, sobre ele, têm que se assumir alguns pressupostos para que as equações do movimento nos possam levar a algum lado. Aquele que nos interessa, que é sustentado em (2.6) que, por sua vez, implica ser uma flutuação próxima do equilíbrio, é que  $\xi(t)$  é Gaussiana e que a média nas realizações de  $\xi(t)$ , a  $t$  fixo, é igual a zero. Adicionalmente, é markoviano e estacionário (adiante voltaremos a este pressuposto) e a autocorrelação vem

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = g\delta(t_1 - t_2) \quad (2.9)$$

A resolução das equações do movimento leva-nos à relação de Einstein[11] entre o coeficiente de difusão e o coeficiente de viscosidade, fazendo a ponte entre uma grandeza microscópica, o coeficiente de difusão, e uma macroscópica. A resolução não tem particular interesse para nós porque estamos interessados apenas nas equações do movimento que regem o movimento Browniano, às quais voltaremos depois de fazer um pequeno parêntesis relativamente ao carácter markoviano.

Uma vez definida uma variável aleatória como  $X = \omega(x)$ , pode-se definir uma infinidade de outras variáveis aleatórias a partir da primeira[34] como

$$Y_X(t) = f(x, t) \quad (2.10)$$

que se designa por processo estocástico. À função ordinária onde substituímos  $X$  por uma das suas realizações  $x$  chama-se realização do processo. Daqui pode-se estabelecer a caracterização do processo com base na densidade de probabilidade  $P_X(x)$  da variável aleatória  $X$ . A média é dada por

$$\langle Y(t) \rangle = \int Y_X(t) P_X(x) dx \quad (2.11)$$

e, em termos gerais, para uma sequência de instantes  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , temos o momento de ordem  $n$  dado por

$$\langle Y(t_0)Y(t_1)Y(t_2)\dots Y(t_n) \rangle = \int Y_X(t_0)Y_X(t_1)Y_X(t_2)\dots Y_X(t_n)P_X(x)dx \quad (2.12)$$

De particular interesse é a função de autocorrelação dada por

$$\langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle = \langle (Y_X(t_1) - \langle Y_X(t_1) \rangle) (Y_X(t_2) - \langle Y_X(t_2) \rangle) \rangle \quad (2.13)$$

que, para  $t_1 = t_2$  resulta na variância do processo. Os processos em que as medidas dos momentos são constantes para qualquer translação no tempo dizem-se estacionários.

Uma propriedade fundamental dos processos estocásticos na história da Física (e, consequentemente, das Finanças Quantitativas) é a propriedade de Markov. Quando, num processo estocástico, para qualquer conjunto de  $n$  instantes sucessivos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  se tem

$$P_{1|n-1}(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}; y_{n-2}, t_{n-2}; \dots; y_1, t_1) = P_{1|1}(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.14)$$

ou, por extenso, a probabilidade de termos  $y_n$  em  $t_n$ , conhecendo todas as realizações de  $Y$  nos instantes anteriores, é igual à probabilidade de termos  $y_n$  em  $t_n$  conhecendo apenas a sua realização em  $t_{n-1}$ , sendo irrelevantes as realizações da variável aleatória em todos instantes anteriores a  $t_{n-1}$ . Se tal se verificar, diz-se que estamos perante um processo de Markov. A  $P_{1|1}$  chamamos de probabilidade de transição e um processo de Markov fica completamente caracterizado se conhecermos  $P_1(y_1, t_1)$  e  $P_{1|1}$ .

Apesar de, nas expressões acima, se poder inferir que a variável aleatória  $Y$  está definida sobre um domínio unidimensional, toda a formulação continua válida num domínio multidimensional, pelo que  $Y$  pode encerrar muito mais que uma variável. E, se um dado processo físico não é markoviano, é possível introduzir componentes

adicionais de forma a que possa ser encarado como um processo markoviano. O papel destes componentes adicionais é introduzir informação detalhada, que estava antes embebida nas variáveis que estavam sob análise e, por princípio, todo o sistema físico fechado poder ser descrito por um processo de Markov que envolva todas as variáveis do seu espaço fase e, portanto, nessas condições, é garantido o carácter markoviano do processo pela inclusão de variáveis (o que não significa que seja possível incluir essas variáveis). Se o sistema é aberto (e por aberto queremos dizer que não temos conhecimento dos fluxos com reservatórios envolventes), o carácter markoviano não está garantido, porque sabemos que o número de variáveis do sistema é, em si mesmo, variável e, nestas condições, não podemos assumir que existe um processo na forma (2.14). Ou seja, o carácter markoviano de um processo é uma questão de escolha de variáveis para um sistema fechado. Mas num sistema aberto esse conjunto de variáveis, a existir, não reflecte o real comportamento do sistema e não ser que esse conjunto de variáveis reflecta a história do sistema e, logo, o carácter markoviano do processo é um mero artifício matemático, não um reflexo da física subjacente.

Se fixarmos a sequência de instantes em  $t_1, t_2, t_3$ , integrarmos em  $y_2$  e dividirmos os dois lados da equação por  $P_1(y_1, t_1)$  temos

$$P_{1|1}(y_3, t_3|y_1, t_1) = \int P_{1|1}(y_3, t_3|y_2, t_2) P_{1|1}(y_2, t_2|y_1, t_1) dy_2 \quad (2.15)$$

que se trata da conhecida equação de Chapman-Kolmogorov, que estabelece a forma da probabilidade de transição de qualquer processo markoviano. Se assumirmos que o processo é markoviano e homogéneo pode-se escrever a probabilidade de transição de  $y_1$  para  $y_2$ , por unidade de tempo, como  $W(y_2|y_1)$ , e escreve-se a equação de Chapman-Kolmogorov de forma diferencial como

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int W([y|y'])P(y', t) - W(y'|y)P(y, t) dy' \quad (2.16)$$

que também é chamada de *equação mestra* que, sendo equivalente a (2.15), tem uma interpretação diferente[34].

A equação de Chapman-Kolmogorov é uma equação não-linear que resulta do carácter markoviano do processo, mas não encerra nenhuma informação adicional sobre o processo em si. Na equação mestra tomam-se em consideração as probabilidades de transição de um sistema específico e temos uma equação linear para as probabilidades de realização dos estados do sistema. Se exprimirmos a probabilidade de transição em função do tamanho do salto  $r \equiv y' - y$  de forma que

$$W(y|y') = W(y; r) \quad (2.17)$$

então

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int W(y - r; r) P(y - r, t) dr - P(y, t) \int W(y; -r) dr \quad (2.18)$$

Assumindo que apenas pequenos saltos ocorrem (pressuposto muito importante daqui para a frente) e assumindo que também  $P(y, t)$  varia de forma lenta em  $y$ , pode expandir-se o primeiro integral de (2.18) e obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = & \int W(y; r) P(y, t) dy - \int r \frac{\partial}{\partial y} [W(y; r) P(y, t)] dr + \\ & \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [W(y; r) P(y, t)] dr - P(y, t) \int W(y; -r) dr \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definindo os momentos de salto de ordem  $\nu$  como

$$a_\nu(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^\nu W(y; r) dr \quad (2.20)$$

resulta

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [a_1(y) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a_2(y) P] \quad (2.21)$$

que é chamada a equação de Fokker-Planck, um caso particular da equação mestra cujos pressupostos subjacentes são o carácter markoviano do processo e os saltos  $y \rightarrow y'$  pequenos. Mais genericamente, por razões práticas, a equação de Fokker-Planck escreve-se

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [A(y) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) P] \quad (2.22)$$

em que o conhecimento de  $W$  é reduzido ao conhecimento de duas funções arbitrárias  $A(y)$  e  $B(y)$  que podem ser obtidas de forma empírica[32]. Se se escolher um intervalo de tempo  $\Delta t$  pequeno o suficiente que  $y$  não consiga mudar muito em  $\Delta t$  mas grande o suficiente para que o carácter markoviano não se perca, então achando  $\langle \Delta y \rangle$  e  $\langle (\Delta y)^2 \rangle$  temos  $A(y)$  e  $B(y)$ .

Voltando ao movimento browniano de que falámos no início deste capítulo e pegando na variável posição  $x$  temos

$$A(x) = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t} = 0 \quad (2.23)$$

$$B(x) = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{\Delta t} = \text{const} = B \quad (2.24)$$

vem, para a equação de Fokker-Planck para a transição

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

Demonstra-se[34] que a constante de difusão de Einstein é

$$D = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t} \quad (2.26)$$

e, com a condição inicial  $P(x, 0) = \delta(x)$ , obtem-se

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2.27)$$

que é uma gaussiana com máximo em zero e com largura que cresce com  $2\sqrt{Dt}$ . O processo representado por esta probabilidade de transição, e que está associado ao fenómeno físico conhecido como movimento browniano, designa-se por processo de *Wiener* e tem, como veremos, um papel fundamental nas finanças quantitativas. Neste mesmo domínio, estamos também interessados no caso em que  $A(x) = A_0 + A_1 x$ . No caso em que  $A_1 < 0$ , a equação de Fokker-Planck tem como solução um processo markoviano (por pressuposto) estacionário e gaussiano, designado por processo de *Ornstein-Uhlenbeck*.

Embora as duas abordagens que aqui fizemos ao movimento browniano não sejam equivalentes, porque a equação de Fokker-Planck define um processo estocástico completo e a equação de Langevin só usa os dois primeiros momentos, tendo  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t')$  demonstra-se[34] que as equações

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \xi(t) \\ \frac{\partial P(y, t)}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial}{\partial y}(yP) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

representam o mesmo processo  $y$ , que com  $\gamma > 0$  temos um processo de Ornstein-Uhlenbeck, com  $\gamma = 0$  um processo de Wiener. Porque o mundo das finanças quantitativas usa uma representação diferente dos processo estocásticos, a equação de Langevin (ou a correspondente equação de Fokker-Planck) representa-se como

$$dy = A(y)dt + C(y)dW(t) \quad (2.29)$$

em que  $W(t)$  é um processo de Wiener.

Não entrando no detalhe daquilo que é o formalismo associado às equações diferenciais estocásticas, porque estamos interessados apenas naquilo que lhe está subjacente enquanto pressupostos, o movimento browniano, e particularmente o processo de Wiener, assume uma importância basilar nas finanças quantitativas porque se assumirmos que o comportamento de um qualquer activo transaccionado em mercado organizado segue uma dinâmica de passeio aleatório com amplitude média quadrática

finita, estamos a falar de um processo de Wiener no limite do número de passos tender para infinito. E é mais no conceito de passeio aleatório, que no conceito de movimento browniano, que as finanças quantitativas se fundam[12]. O modelo de passeio aleatório tem associado a completa independência da variação face a todas as outras variáveis envolvidas no sistema, particularmente os passos anteriores. Significa isto que o carácter markoviano do processo é mais que uma simples escolha de variáveis, é uma imposição de fundo.

A título de conclusão desta secção entramos um pouco pelos fundamentos das finanças quantitativas voltando a Black e Scholes, por um lado, e Merton por outro, que procuravam resolver o problema da valorização de opções (não vamos entrar em detalhes sobre os instrumentos financeiros que podem ser consultados em detalhe em[15]) sobre um activo que se considera seguir um passeio aleatório e, no limite, um processo na forma (2.29) ou, mais concretamente,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t) \quad (2.30)$$

Outro exemplo de equação diferencial estocástica de grande importância nas finanças quantitativas é o passeio aleatório com *mean-reversion* na forma

$$dS = (\nu - \mu S) dt + \sigma S dW(t) \quad (2.31)$$

em que: se  $S$  é grande existe uma tendência para, em média, o valor da variação ser negativo; se  $S$  é pequeno, então a variação será, em média, positiva. Quando o processo em causa é uma variável como a taxa de juro, que não pode crescer infinitamente porque o seu crescimento é, por si só, motivo para descer (taxas de juro altas implicam dinheiro caro, que implica quebra na procura, que implica baixa nas taxas de juro), ele é explicado por um processo deste tipo. Quando  $S$  é a taxa de juro, estamos perante o modelo de Vasicek que é o modelo mais próximo daquele que iremos construir, embora o resultado final não seja o mesmo porque não nos baseamos nos mesmos pressupostos.

Concluindo, para que no domínio das finanças quantitativas se expliquem as variações das variáveis macroscópicas por passeios aleatórios ou, fisicamente, por processos de Wiener, é necessário assumir que o sistema económico, formado pelo conjunto de mecanismos económicos que forma essas variáveis, é equivalente a um conjunto de mecanismos físicos de um sistema termodinâmico fechado em equilíbrio e, mais, que essas variações são completamente independentes das variações anteriores. Estes dois pressupostos levam-nos a uma distribuição de probabilidade das variações gaussiana. Só que, como veremos, não só dificilmente se pode considerar a economia como um sistema fechado, como o conceito de equilíbrio num sistema económico é completamente diferente do conceito de equilíbrio num sistema físico. Mais, a experiência mostra

que os modelos que se baseiam em passeios aleatórios de amplitude média quadrática finita, isto é, modelos baseados em processos de Wiener não são coincidentes com a realidade e a sua utilização provoca perdas financeiras astronómicas[33].

Para se entender o impacto de se assumir como verdadeiro que os processos económicos podem ser modelados como processos estocásticos, vamos descrever muito sucintamente uma aplicação em Finanças onde esta assumpção é tomada como válida e cujo impacto social é enorme - as medidas regulamentares de alocação de capital para o risco de crédito.

Um banco é, grosso modo, uma empresa que pede dinheiro emprestado por um preço, designado por taxa, para emprestar por outro mais elevado, obtendo o seu rendimento da diferença entre o proveito do que empresta e o custo do que pede emprestado. Não havendo a possibilidade de os clientes não pagarem os créditos, nada impediria um banco de pedir emprestado uma quantidade infinita de dinheiro para emprestar uma quantidade infinita de dinheiro. Mas, existindo essa possibilidade de facto, quando um cliente não paga (*incumprimento* ou, em inglês, *default*) o crédito ao banco, significa que o banco tem que se substituir ao cliente no pagamento desse dinheiro aos depositantes, com dinheiro próprio do banco e não com dinheiro dos seus depositantes. Se pudesse usar dinheiro dos depositantes, iria continuar a pedir dinheiro emprestado para cobrir os clientes que não pagam os créditos até ao ponto em que, não havendo mais depositantes, o banco quebrava. Nessa altura, o banco deixa de pagar aos seus depositantes, entre os quais os maiores são, tipicamente, outros bancos, que por sua vez deixam de pagar aos outros bancos e assim sucessivamente, num fenómeno em avalanche chamado *credit crash*.

Então, para proteger o mundo financeiro contra este efeito de avalanche, os maiores bancos do mundo uniram-se para criar uma regulamentação que proteja todos os bancos, regulamentação essa conhecida como Acordos de Basileia que obrigam os bancos a manter 8% de capitais próprios para responder a situações de risco, tais como de risco de crédito. O pressuposto de que os processos económicos são modelados por processos estocásticos é ainda mais importante noutro tipo de risco, o risco de mercado mas, para o objectivo desta descrição, o exemplo do risco de crédito é de explicação mais simples. O facto de os bancos serem obrigados a manter esse nível de capital impede-os de poderem pedir uma infinidade de dinheiro para emprestarem uma infinidade de dinheiro.

Em 2008 entrou em vigor uma nova versão do acordo[26] que permite aos bancos usar uma versão simplificada do modelo de Merton-Vasicek[35] para calcular o risco de incumprimento. O modelo consiste em assumir que existe um factor externo à carteira de crédito de um banco representado por um processo de Wiener,  $dX$ , e que

o valor dos activos de um cliente segue um processo Wiener,  $dY$ , representado por

$$dY = \sqrt{\rho}dX + \sqrt{1-\rho}dU \quad (2.32)$$

em que  $dU$  é o factor idiossincrático, uma distribuição  $N(0, 1)$ , que representa a parte da saúde económica do cliente que não depende de factores externos. Assumindo que existe um nível da ‘saúde financeira’<sup>3</sup> do cliente,  $\epsilon$ , abaixo do qual ele não consegue pagar os seus créditos, então temos para que entre em incumprimento

$$\sqrt{\rho}dX + \sqrt{1-\rho}dU \leq \epsilon \quad (2.33)$$

em que  $\rho$  é a correlação medida entre o nível de saúde do cliente e a evolução do factor externo, ou

$$\frac{\epsilon - \sqrt{\rho}dX}{\sqrt{1-\rho}} \geq dU \quad (2.34)$$

Se tomarmos um nível de saúde do cliente a partir do valor esperado do incumprimento, obtido a partir de todos os clientes no limite dos grandes números, e assumindo que a probabilidade de incumprimento é uma função normal centrada no valor esperado  $PD$ , então  $\epsilon = \Phi^{-1}(PD)$ , em que  $\Phi^{-1}$  é a função inversa da normal cumulativa. Daqui resulta que a probabilidade de perda com um grau de certeza  $dX$  é

$$P = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}dX}{\sqrt{1-\rho}} \right] \quad (2.35)$$

ou, como a regulamentação impõe um grau de certeza de 99.9% obtem-se

$$P = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}} \right] \quad (2.36)$$

Esta é a expressão segundo a qual todos os bancos do mundo devem avaliar o seu risco de crédito. Medem experimentalmente uma probabilidade de incumprimento dos eventos verificados nas carteiras de crédito e, com um valor de  $\rho$  imposto pelo regulador, obtêm a probabilidade de perda.

É óbvia a importância do pressuposto de que as variáveis envolvidas seguem processos de Wiener. Tirando este pressuposto, não há nada no modelo de Merton-Vasicek e neste método de avaliação de risco de crédito que seja válido e, consequentemente, a possibilidade de a avaliação do risco de crédito não estar de acordo com os riscos efectivamente incorridos por todos os bancos do mundo é real, uma vez que as expressões envolvendo correlações não são válidas, assim como os integrais  $\Phi$ . Mas o facto é que os dados experimentais evidenciam que os processos económicos não são processos de Wiener, como veremos mais à frente.

---

<sup>3</sup>O que é esta ‘saúde financeira’ é algo de intuitivo mas cuja definição rigorosa não é necessária, atendendo que a variável é latente.



## 2.3 Redes Complexas

Quando se assume que uma dada métrica macroscópica segue uma dinâmica semelhante ao movimento Browniano, estamos a assumir um pressuposto relativamente à forma como a partícula Browniana interage com as partículas do banho: o de que o choque com as partículas que a rodeiam é igualmente provável. Transportando isto para o mundo dos mercados, significa que qualquer agente económico executa com igual probabilidade uma transacção (um ‘choque’) com qualquer outra partícula na formação do preço. No entanto, as evidências empíricas mostram que a dinâmica humana, ao contrário da partícula no banho termodinâmico, rege-se por interacções completamente anisotrópicas em que há vizinhos com quem a ‘partícula’ humana interage mais facilmente que outros, naquilo a que se designa por redes complexas.

Não existe uma definição consensualmente aceite de ‘rede complexa’, mas a noção de que é um sistema organizado sem a aplicação de um princípio base ou, de outra forma, que é um sistema em que o estudo detalhado de uma das partes em nada contribui para o conhecimento do seu funcionamento é uma boa aproximação[27]. Nesta secção, vamos debruçar-nos sobre o conhecimento actual de redes complexas, com maior incidência sobre o tipo de rede de Barabási-Albert[1] cujas características são mais compatíveis com as evidências experimentais.

Vilfredo Pareto[38] descobriu empiricamente que 80 % da riqueza em Itália nos finais do séc. XIX era detida por 20% das pessoas, o que passou a ser designado por lei 80-20. Mais recentemente, Paul Krugman[20] e Nassim Nicholas Taleb[33], talvez os economistas mais mediáticos da actualidade, foram mais radicais sugerindo que esta lei deveria ser a lei 95-5, ou mesmo 99-1, apesar do bem-estar das populações ser incomparavelmente superior no início do séc. XXI na Europa do que era no fim do séc. XIX em Itália. Independentemente da proporção, o facto é que as diferenças entre os seres humanos não só deram origem àquilo a que chamamos economia, como geraram uma desproporção nas relações económicas, algo completamente oposto ao que é esperado num meio homogéneo. Estas desproporções são indicativas de que a rede de relações económicas é uma rede complexa.

Uma rede é constituída por nós e por ligações entre estes[22]. Tudo o que quisermos dizer mais de cada um destes objectos depende do problema que estamos a tratar, i.e., da rede que estamos a estudar. Começando pelas ligações, estas podem ser simétricas ou não. A ligação de amizade entre duas pessoas ou uma ligação Lennard-Jones entre dois átomos são ligações simétricas, no sentido em que a natureza do sistema não se altera se trocarmos os nós unidos pela ligação. Por outro lado, o conhecimento de uma pessoa por outra ou uma ligação microeconómica como a que descrevemos na secção 2.1, são ligações em que não podemos trocar os nós sem alterar a natureza do pro-

blema. Milhões de pessoas conhecem o Presidente da República, mas este não pode conhecer milhões de pessoas. Numa relação microeconómica, temos um produtor que cede trabalho e um consumidor que o consome. As redes compostas por interacções simétricas chamam-se adireccionais, enquanto aquelas que são compostas por ligações assimétricas designam-se redes direccionais. Em princípio, ligações ligam nós diferentes, embora existam problemas, como o caso dos autores de artigos científicos em que as ligações são as citações, em que podem existir auto-ligações. Atendendo a que uma auto-ligação económica é a negação da própria economia, vamos assumir daqui em diante que a auto-ligação não faz sentido.

Os nós da rede são os objectos que determinam a criação, a escolha e a destruição das ligações e são estes que encerram as propriedades físicas estáticas, como o número de electrões, a riqueza, a carga genética, etc. Quando combinamos as propriedades dos objectos nós com a forma como estes estabelecem ligações com os demais nós do sistema, temos aquilo a que os físicos chamam de rede complexa. A designação vem do facto da sua estrutura ser demasiado complexa para ser tratada de forma analítica, por estarmos a falar de sistemas com uma infinidade de variáveis envolvidas com eventos de criação e destruição que não são determinísticos. No entanto, existem formas tipificadas de rede que nos permitem ter uma aproximação às redes reais que pretendemos estudar. Existem três importantes tipos de topologia principais de redes complexas que descreveremos de seguida.

As redes aleatórias, ou redes de Erdős-Rényi, caracterizam-se pela probabilidade de um nó se ligar a outro ser função do número total de nós,  $N$ , e por a probabilidade de encontrarmos um nó com  $k$  ligações ser uma distribuição de Poisson

$$P(k) = \frac{e^{-\bar{k}} \bar{k}^k}{k!} \quad (2.37)$$

em que  $\bar{k}$  é o número médio de ligações na rede (uma métrica macroscópica, portanto).

As redes aleatórias, no entanto, explicam mal as redes sociais reais porque têm um baixo coeficiente de *clustering*, isto é, têm um número baixo de ligações aos nós que estão ligados aos nós vizinhos. Ou, usando a analogia da amizade, amigo do meu amigo não aparece como meu amigo, o que nas redes humanas surge como uma característica importante. Uma topologia que reflecte essa característica é a *small-world*, em que os  $N$  nós são dispostos em cadeia e ligados com  $k_0$  vizinhos. Com probabilidade  $p$ , que é um parâmetro da rede, cada ligação é reconstruída passando a ligar-se a um dos  $N$  nós, dando assim uma rede dominada pelos vizinhos mais próximos, mas com algumas ligações aos vizinhos mais afastados.

Tanto as redes aleatórias, como as small-world, têm o problema de não crescerem, nem em número de nós, nem em número de ligações e, conseqüentemente, são sistemas com uma dinâmica muito limitada. Outra característica que as torna inadequadas para o tratamento de muitas redes humanas é o facto de não existir um critério segundo o qual a ligação a um nó é preferível à ligação a outro nó. Este factor é visível em vários resultados experimentais[2] em que, em várias redes sociais estudadas, quando um novo nó entra na rede tende a ligar-se aos nós que já têm mais ligações. Para resolver, quer o problema do crescimento, quer o problema da ligação preferencial, foram desenvolvidas por Barabási-Albert[1] aquelas que hoje são chamadas de redes de Barabási-Albert que, recordemos, são modelos que se destinam a explicar redes mais complexas.

Vários estudos[2] demonstram que muitas redes envolvendo seres humanos são redes livres de escala, isto é, a distribuição do número de primeiros vizinhos, ou grau, segue uma lei de potência, i.e.,

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad (2.38)$$

e de que a lei de Pareto é uma evidência. Por isso vamos focar-nos mais neste modelo de rede. O modelo de redes livres de escala de Barabási-Albert foi introduzido em 1997 para modelar redes de sistemas abertos, que têm um dado crescimento associado e têm a característica da ligação preferencial.

Uma rede de Barabási-Albert segue um algoritmo relativamente simples. O sistema é iniciado com um pequeno número ( $m_0$ ) de nós e, em cada passo do tempo, adicionamos um novo nó com  $m$  ligações, que ligam o novo nó a  $m$  nós diferentes já presentes no sistema. Quando escolhemos os nós aos quais o novo nó se liga, assume-se que a probabilidade de ligar ao nó  $i$  depende do número de ligações que esse nó já tem,  $k_i$ , tal que a probabilidade de ligação é

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.39)$$

Depois de  $t$  vezes esta rotina, temos uma rede com  $N = m_0 + t$  nós e  $mt$  ligações e a rede resultante é uma rede invariante de escala, tal como (2.38) com  $\gamma = 3$ . Detalhe importante na construção destas redes é que as ligações são todas iguais e adireccionais. Isto implica que a dinâmica da rede se faça exclusivamente pela adição de novos nós e que todas as ligações têm o mesmo peso.

Se as ligações são direccionais, têm-se duas conectividades envolvidas, a de saída e a de entrada, e duas distribuições de probabilidade

$$P(k_{in}) \propto k_{in}^{-\gamma_{in}} \quad (2.40)$$

$$P(k_{out}) \propto k_{out}^{-\gamma_{out}} \quad (2.41)$$

Há uma considerável produção científica sobre redes complexas à qual falta, como já referimos, a filtragem que o tempo exerce sobre o que é realmente importante, e que pode ser consultada nos resumos[22] e[2]. Para o nosso trabalho, o modelo de Barabási-Albert fornece aquilo que nos parece fundamental para uma aproximação a uma rede económica, ao crescimento e ao mecanismo da ligação preferencial.

Os dados experimentais já publicados sobre redes humanas, muito favorecidos pelas bases de dados que a internet proporciona, indiciam que o modelo de Barabási-Albert é uma boa aproximação àquilo que a realidade demonstra. Os links entre sites de internet, uma subconjunto da economia, tem  $\gamma_{in} = 2.1$  e  $\gamma_{out} = 2.45$  depois de estudados 325729 nós. Mas os exemplos repetem-se e em[2] encontram-se vários exemplos de redes humanas, alguns subconjuntos da economia, que revelam o mesmo tipo de comportamento.

Resumindo, as evidências experimentais de que as organizações humanas e, particularmente, a economia não são redes aleatórias mas sim redes livres de escala, existem desde os fins do séc. XIX e, com o desenvolvimento da internet, surgiram estudos mais rigorosos. Neste trabalho usaremos o modelo de Barabási-Albert para os cálculos numéricos.

## 2.4 Criticalidade Auto-Organizada

O conceito de equilíbrio avançado por Von Neumann[36] para o equilíbrio microeconómico no estabelecimento de um preço é, do ponto de vista físico, aquilo que se designa de equilíbrio termodinâmico, que é uma propriedade dos sistemas físicos fechados, ou em equilíbrio com um reservatório fechado onde está mergulhado. Também toda a formulação do movimento browniano se baseia no pressuposto que estamos num sistema fechado próximo do equilíbrio. Na realidade, o conceito de sistema fechado é uma aproximação aos sistemas montados em laboratório porque em Física só um sistema se considera verdadeiramente isolado - o universo. Os sistemas reais são sistemas onde a troca irregular de massa e energia com o exterior é a regra, não a excepção. Por exemplo, o planeta Terra (tal como os outros planetas do sistema solar) recebe um fluxo permanente de energia do Sol, que processa parte e dissipa outra parte naquilo a que se chama de *estado estacionário fora do equilíbrio*.

A diferença fundamental entre um sistema em equilíbrio e um sistema que se mantém num estado estacionário fora do equilíbrio é que, perante um estímulo externo, o sistema em equilíbrio responde de forma linear e o sistema num estado estacionário fora do equilíbrio, não[16]. Habitualmente, sistemas que se encontram em

estados fora do equilíbrio, de forma mais ou menos permanente, exibem um comportamento sem escala característica aparente e sem uma dimensão previsível. Este comportamento, em que o sistema se mantém num estado permanente fora do equilíbrio, é chamado de *criticalidade auto-organizada* pela forma como o sistema se organiza a si mesmo de modo a manter-se num estado crítico. É esse, como veremos mais à frente, o comportamento típico dos sistemas económicos revelado nos índices bolsistas principais. Nesta secção, vamos descrever o mais simples dos modelos de criticalidade auto-organizada, o modelo BTW para a pilha de areia[29], e faremos uma descrição mais formal das ‘avalanches’ associadas ao fenómeno da criticalidade auto-organizada (SOC, do inglês Self-Organized Criticality).

Imaginemos uma pilha de areia em cima de uma mesa, sobre a qual vamos largando um grão de areia numa posição aleatória. Inicialmente, os grãos movimentam-se à medida que caiem para uma posição de baixa energia e dizemos que o sistema tem muitas avalanches pequenas e localizadas. Apenas um grão se mexe, com pouca ou nenhuma influência sobre os demais grãos do sistema. Neste caso, o sistema está num estado em que podemos observar um equilíbrio termodinâmico - a resposta do sistema é linear face ao estímulo externo. Mas, à medida que vamos adicionando grãos à pilha de areia, esta vai crescendo de tamanho porque a fricção entre os grãos consegue manter uma dada inclinação na pilha e esta vai acumulando energia potencial. No entanto, existe uma inclinação na pilha a partir da qual a pilha tem que libertar essa energia por meio de uma avalanche que envolve vários grãos. A avalanche não liberta toda a energia potencial tornando a pilha num monte de areia chato, apenas reorganiza os grãos de forma a que a inclinação fique abaixo daquela de onde pode continuar a crescer. Continuando a acrescentar grãos, o sistema vai intervalando as situações de avalanche e de crescimento, mantendo-se permanentemente fora do equilíbrio.

Se a inclinação da pilha é muito baixa, então esta pode receber muitos grãos sem se observar uma reacção que não o crescimento. Se a inclinação for muito elevada, as avalanches tendem a baixá-la. Os grãos auto-organizam-se de forma a que a inclinação vá oscilando em torno daquele que é o seu estado estacionário. No entanto, temos uma grande diferença face às oscilações que vimos nos processos estocásticos em equilíbrio termodinâmico. Embora o tamanho das avalanches seja influenciado pelo limite do sistema, cada grão pode gerar uma avalanche sem limite (que não o imposto pelo tamanho do sistema). Ou, de outra forma, não existe um tamanho característico para a amplitude da oscilação como acontece, por exemplo, quando esta amplitude segue uma curva gaussiana. Adicionalmente, como podemos facilmente inferir da mecânica da pilha, o processo de crescimento por adição de grãos ocorre numa escala de tempo diferente da avalanche. Enquanto o crescimento da pilha é tão rápido quanto a taxa de adição de grãos o determina, a avalanche é tão rápida quanto a necessidade de reduzir

a inclinação impõe, envolvendo o número de grãos que isso implicar e, tipicamente, a uma taxa muito maior do que a do crescimento. Desta forma, a oscilação em torno deste estado estacionário, a que chamamos *crítico* (a justificação do nome veremos mais adiante), tem uma caracterização completamente distinta daquela que é uma oscilação em torno de um sistema em equilíbrio termodinâmico.

O modelo BTW[29] a uma dimensão, o mais simples dos modelos representando um sistema SOC, é baseado no paradigma da pilha de areia. Considera-se uma rede unidimensional com  $L$  sítios  $i = 1, 2, 3, \dots$  em que se impõe que os grãos não podem tomar posições abaixo de  $i = 1$  e se, eventualmente, tomarem uma posição para lá de  $i = L$  saem do sistema. Em cada sítio da rede podem estar alojados mais do que um grão, o que faz com que tenhamos associada ao sítio uma medida de ‘altura’,  $h_i$ , dada pelo número de grãos que o sítio pode alojar. A inclinação no sítio é dada por  $z_i = h_i - h_{i+1}$ , com a convenção  $h_{L+1} = 0$ .

A todo o sistema é atribuído um limite de inclinação  $z_{th}$  acima do qual o sítio não consegue alojar mais grãos, dando origem à avalanche. Nessa altura, o sítio  $i$  faz cair sobre o sítio  $i + 1$  um grão e, com isso, altera a sua altura  $h_i \rightarrow h_i - 1$  e a altura do sítio  $i + 1$  para  $h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1$ . O sítio  $i + 1$  terá agora que fazer a sua própria contabilidade e se  $z_{i+1} > z_{th}$  então o sítio  $i + 1$  terá que fazer cair um grão para o sítio  $i + 2$  e assim, sucessivamente, até que haja um sítio onde a contabilidade da inclinação resulte inferior a  $z_{th}$  e a avalanche pare. O modelo corre impondo uma adição regular de grãos ao sistema.

Este modelo é muito simples, mas faz reflectir todas as características de um sistema crítico auto-organizado, como a resposta não linear ao estímulo externo, sem outra dimensão característica que não  $L$  e a organização do sistema para que este oscile em torno de um ponto crítico. O facto de ser unidimensional, esconde o facto de em redes não regulares o valor de  $z_{th}$  não poder ser constante em toda a rede[17] mas, para uma descrição sucinta de um modelo de um sistema crítico auto-organizado e como base de outros modelos mais sofisticados, o modelo BTW foi extremamente importante.

Na natureza, existem vários fenómenos que podem ser descritos com evoluções do modelo BTW como, por exemplo, a ocorrência de terremotos. O sistema de placas tectónicas da crosta terrestre está a receber, de forma permanente, ‘grãos’ de energia devido à formação nas zonas de *rift* de nova crosta, que é destruída junto às placas continentais por subducção. Este movimento faz com que as placas se movimentem umas relativamente às outras, gerando, com o atrito, a ‘inclinação’ da pilha de areia. Quando a energia acumulada numa placa vence o atrito com a outra placa dá-se o terremoto ou, por analogia, a avalanche, cuja magnitude segue uma lei coincidente

com o esperado num sistema crítico auto-organizado, uma lei de potência designada por lei de Gutenberg-Richter.

Do ponto de vista formal, a criticalidade auto-organizada pode ser explicada se tomarmos a avalanche como um processo multiplicativo, como veremos de seguida.

Seja  $X$  uma variável aleatória que assume valores discretos não negativos e definimos

$$p_k = P(X = k) \quad (2.42)$$

a probabilidade desses valores ocorrerem.

Temos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = P(X < +\infty) \quad (2.43)$$

e

$$P(X = +\infty) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \quad (2.44)$$

Se  $P(X = +\infty) = 0$  diz-se que  $X$  é finita. Se  $P(X = +\infty) > 0$  então  $E(X) = +\infty$ . Senão,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k \quad (2.45)$$

ou, alternativamente,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) \quad (2.46)$$

Seja  $z$  complexo tal que  $|z| \leq 1$ . Define-se neste domínio a função

$$g(z) = p_0 + z p_1 + z^2 p_2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k \quad (2.47)$$

o que, pela definição de valor esperado (2.45) nos dá

$$g(z) = E(z^X) \quad (2.48)$$

A função  $g$  chama-se função geradora de probabilidade da sequência  $\{p_k\}$  ou, mais vulgarmente, função geradora de probabilidade da variável aleatória  $X$ . Como  $p_k \geq 0$ ,  $0 \leq \sum p_k \leq 1$  e  $|z| \leq 1$  então a série de potências (2.47) converge uniformemente e

é infinitamente diferenciável. Os valores de  $g(z)$  determinam de forma única a série  $\{p_k\}$  dado que

$$p_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \quad (2.49)$$

Note-se que  $g(0) = p_0$  e  $g(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = P(X < +\infty)$ . Derivando uma vez em ordem a  $z$  (nas condições já referidas de diferenciabilidade) temos

$$\frac{dg(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{k-1} p_k \quad (2.50)$$

Se fizermos  $z = s$ , real, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{dg(s)}{ds} = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = E(X) \quad (2.51)$$

Suponhamos agora que temos um conjunto de variáveis aleatórias,  $X_n$ , independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), discretas, não negativas e finitas para as quais podemos definir uma função geradora de probabilidade comum  $g_X(s) = E(s^{X_1})$ . Seja também  $N$  uma variável aleatória discreta e não negativa independente de todas as  $X_n$  com função geradora de probabilidade  $g_N(s) = E(s^N)$ . Definimos a soma aleatória  $S = \sum_{k=1}^N X_k$  que é  $S = 0$  se  $N = 0$  e  $S = \sum_{k=1}^n X_k$  se  $N = n > 0$ . Desta forma,  $S$  tem uma função geradora  $g_S$  dada por

$$g_S(s) = E(s^{\sum_{k=1}^N X_k}) \quad (2.52)$$

$$g_S(s) = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} E(s^{\sum_{k=1}^n X_k} | N = n) P(N = n) \quad (2.53)$$

como as  $X_n$  são independentes, também as  $s^{X_n}$  são e

$$g_S(s) = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} E(s^{X_1}) E(s^{X_2}) \dots E(s^{X_n}) P(N = n) \quad (2.54)$$

como as  $X_n$  são identicamente distribuídas, também as  $s^{X_n}$  são e

$$g_S(s) = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (g_X(s))^n P(N = n) \quad (2.55)$$

logo, temos

$$g_S(s) = g_N(g_X(s)) \quad (2.56)$$

e este resultado é particularmente importante para o nosso problema, como veremos de seguida.



Em 1874, Francis Galton e o reverendo Watson formularam o problema da ‘extinção das famílias’ (do nome do pai) ao longo de gerações naquilo que hoje é conhecido como o processo de Galton-Watson.

Consideremos um tipo de objecto que pode gerar objectos do mesmo tipo (filhos). Como exemplos destes objectos podemos considerar bactérias ou neutrões numa reacção em cadeia. Ao conjunto inicial de objectos chama-se geração zero, aos seus filhos geração 1, aos filhos destes geração 2 e assim sucessivamente. Representa-se por  $Z_n$  a população, isto é, o número de objectos, correspondente à  $n$ -ésima geração. E vamos tomar dois pressupostos de base:

1.  $Z_n$  forma uma cadeia de Markov, i.e., a lei de probabilidade que governa uma geração só depende da geração anterior e não das anteriores a esta;
2. O número de filhos de um objecto não depende do número de objectos presentes.

Adicionalmente, sem perda de generalidade, vamos considerar que  $Z_0 = 1$ . Com base nisto, vamos representar por  $P$  a medida de probabilidade tal que a distribuição de  $Z_1$  é dada por  $P(Z_1 = k) = p_k$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\sum p_k = 1$ . Assumindo que  $p_k$  não depende explicitamente da geração, a expressão  $P(Z_n = k) = p_k$  deve ser lida como a probabilidade de um elemento da  $n$ -ésima geração ter  $k$  filhos que vão contar, obviamente, para a  $n+1$ -ésima geração. Então, usando o conceito de função geradora de probabilidade para um conjunto de variáveis aleatórias discretas i.i.d.  $Z_n$ , define-se a função geradora de probabilidade

$$f(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k p_k \quad (2.57)$$

bem como os iteradores da função geradora como  $f_0(s) = s$ ,  $f_1(s) = f(s)$  e  $f_{n+1} = f[f_n(s)]$  em que as funções  $f_n$  são as funções geradoras de probabilidade das variáveis aleatórias  $Z_n$  que, como são obtidas a partir da geração anterior, temos

$$f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) \quad (2.58)$$

e, desta forma, o processo multiplicativo fica definido de forma iterativa por meio das funções geradoras de probabilidade porque os momentos da distribuição podem ser obtidos a partir daqui.

Por definição, assumimos o primeiro momento da distribuição de  $Z_1$  como

$$m = E(Z_1) = \left. \frac{df}{ds} \right|_{s=1} \quad (2.59)$$

e a variância como

$$\sigma^2 = E(Z_1)^2 - m^2 = \frac{d^2 f}{ds^2} \Big|_{s=1} + m - m^2 \quad (2.60)$$

Os momentos da distribuição de  $Z_n$  são obtidos derivando a sua função geradora de probabilidade (2.58) que nos vai dar

$$E(Z_n) = \frac{df_n}{ds} \Big|_{s=1} = m^n \quad (2.61)$$

$$\sigma^2(Z_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^n (m^n - 1)}{n \sigma^2 m^{2n} - m} & \text{para } m \neq 1 \\ n \sigma^2 m^{2n} - m & \text{para } m = 1 \end{cases} \quad (2.62)$$

e o conhecimento dos momentos fecha a caracterização de uma distribuição.

O problema do estudo da avalanche[4] é semelhante ao problema original de Galton-Watson da ‘extinção das famílias’. Por extinção entende-se a sequência aleatória  $\{Z_n\}$  que é nula a partir de um dado valor de  $n = k$ . A avalanche inicia-se num nó em que a energia ultrapassou um dado limite  $U_{th}$ , ou seja,  $Z_0 = 1$ . Nesse instante, o nó inicial vai quebrar as suas ligações com os nós vizinhos,  $Z_1$ , e esta quebra vai contribuir de forma negativa para os seus balanços energéticos que, por sua vez, podem quebrar as suas ligações com os seus vizinhos, e assim sucessivamente até que a avalanche cessa, quando na  $k$ -ésima geração se tem  $Z_k = 0$ . Tendo o processo completamente definido pelas suas funções geradoras, algumas das suas propriedades são importantes para entender o comportamento do processo.

Seja então  $s$  real. Da definição da função  $f$  como uma série de potências de  $p_k$  e, se assumirmos que  $p_0 + p_1 < 1$  (para afastar as soluções triviais), temos

1.  $f$  é estritamente convexa e crescente em  $[0, 1]$ ;
2.  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ ;
3. se  $m \leq 1$  então  $f(s) > s$  para  $s \in [0, 1]$ ;
4. se  $m > 1$  então  $f(s) = s$  tem uma raiz única em  $[0, 1]$ .

Se representarmos por  $q$  a menor raiz de  $f(s) = s$  em  $[0, 1]$ , então as propriedades anteriores obrigam à existência dessa raiz e, mais, se  $m \leq 1$  então  $q = 1$  e se  $m > 1$  então  $q < 1$ . Como  $f$  é estritamente crescente, então para  $0 \leq s < q$  temos  $f(0) = s < f(s) < f(q)$ . Iterando estas inequações temos

$$s < f(s) < f_2(s) < \dots < f_n(s) < q, \forall n \geq 1 \quad (2.63)$$

Daqui resulta o caso particular de  $f_n(0) \rightarrow q$ , que representa a probabilidade de o processo se extinguir numa dada geração  $n$ , que nos dá o chamado teorema da probabilidade de extinção (demonstrado em [14, 19]) que nos diz que a probabilidade de extinção de um processo  $Z_n$  é a raiz mais pequena,  $q$ , da equação  $s = f(s)$ , em que  $f$  é, como já vimos, a função geradora de probabilidade de  $Z_1 = k$ . A probabilidade de extinção é igual a 1 se  $m \leq 1$  e menor que 1 se  $m > 1$ . Sem entrar mais profundamente no campo dos processos multiplicativos, o caso  $m = 1$  é o mais interessante por apresentar dois resultados contraditórios. Por um lado, a probabilidade de extinção do processo é igual a 1 e, como tal, o processo será extinto; por outro, não existe o limite para a sequência de distribuições condicionadas  $\{Z_n | Z_n > 0\}$  o que significa que o instante em que tal acontece é infinito. De forma mais intuitiva, se por um lado o processo sem condicionantes acaba, se condicionarmos o processo à existência de um número positivo não acaba nunca. Neste caso, em que  $m = 1$ , diz-se que o sistema está crítico (e, conseqüentemente,  $m < 1$  subcrítico e  $m > 1$  supercrítico).

Particularmente importante na descrição do processo, para o nosso caso, é a variável aleatória composta pela soma de todas as gerações que nos dá a dimensão da avalanche,  $Z = Z_0 + Z_1 + \dots$ . Seja então  $F_n(w)$  a função geradora de  $Z = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$ , e seja

$$F(w) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Z = i)w^i \quad (2.64)$$

a função geradora de  $Z = Z_0 + Z_1$ , com  $Z_0 = 1$ .

As funções geradoras  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , que diferem por acrescentarmos uma geração à soma, relacionam-se por [14]

$$F_{n+1}(w) = wf[F_n(w)], n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.65)$$

Note-se que agora  $Z$  pode ser infinita mesmo que cada uma das  $Z_n$  seja finita, pelo que  $F(1) \leq 1$  (devido a (2.44)), ao contrário de  $f$  em que tínhamos  $f(1) = 1$ . Vamos representar por  $\rho$  e  $\alpha$  os raios de convergência das séries de potências (2.57) e (2.64), respectivamente, e procuraremos encontrar os coeficientes da série 2.64, que nos vão dar a dimensão da avalanche. Para tal, necessitamos de relacionar as duas funções geradoras de probabilidade e descobrir propriedades para  $F$  equivalentes às aquelas descobertas para  $f$ .

Seja então

$$G(w, s) = wf(s) - s \quad (2.66)$$

Mostra-se [28] que numa dada vizinhança de  $w = 0, s = 0$ , a única solução analítica de

$$G(w, s) = 0 \quad (2.67)$$

é  $s = F(w)$ . Evidentemente, esta solução é válida para  $|w| < \alpha$  e  $|s| < \rho$ . Qualquer função não constante, que seja desenvolvida em série de potências com coeficientes não negativos e com um raio de convergência, tem duas propriedades que podemos aproveitar para este relacionamento que estamos a fazer entre as duas funções geradoras de probabilidade. A primeira é que a função com essas características tem uma singularidade no raio de convergência; a segunda é que o limite da função existe desde que se aproxime do raio de convergência por valores inferiores. Portanto, dentro do raio de convergência, uma função descrita como série de potências é contínua. Então, para  $F(w)$ , se  $|w| \leq \alpha$  então  $|s| \leq \rho$  onde  $s = F(w)$  e

$$w = F^{-1}(s) = \frac{s}{f(s)} \quad (2.68)$$

o que significa que  $f(s)$  não tem zeros no raio de convergência de  $F$ . Dadas estas características, então  $F$  é um mapeamento biunívoco em  $|w| \leq 1$ . Nestas condições, é válido o teorema de inversão de Lagrange (também conhecido como fórmula de Burman-Lagrange) e dizer que[28], com base em (2.64)

$$P_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (f(s))^n \right]_{s=0} \quad (2.69)$$

Suponha-se[14] então que  $p_0 > 0$  e que existe um ponto  $a > 0$  dentro do círculo de convergência de  $f$  para o qual  $f'(a) = \frac{f(a)}{a}$ . Seja também  $\alpha = \frac{a}{f(a)}$  e seja  $d$  o maior inteiro tal que  $p_r \neq 0$  obrigue que  $r$  seja múltiplo de  $d$ . Se  $r - 1$  não é múltiplo de  $d$ , então  $P(Z = r) = 0$ . Mas se  $r - 1$  é múltiplo de  $d$ , então

$$P(Z = r) = d \left( \frac{a}{2\pi\alpha f''(a)} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{-r} r^{-\frac{3}{2}} + O(\alpha^{-r} r^{-\frac{5}{2}}), r \rightarrow \infty \quad (2.70)$$

que, para  $\alpha = 1$ , nos diz que a probabilidade de termos um tamanho  $r$  depende de uma potência de  $r$ . Este resultado, que se designa por teorema de Otter e cuja demonstração detalhada pode ser consultada em[28] e[14], é extremamente importante em todo o campo da criticalidade auto-organizada. Demonstra-se que, assintoticamente, a probabilidade de uma avalanche, aqui representada como um processo multiplicativo, ter uma determinada dimensão (que corresponde à soma das variáveis aleatórias representativas de todas as gerações em que  $Z_n > 0$ ) é

$$P(Z = r) \propto r^{-\frac{3}{2}} \quad (2.71)$$

ou seja, segue uma lei de potências. Para tal, basta que  $\alpha = 1$ , o que implica que  $a = f(a)$  e que  $f'(a) = m = 1$ , i.e., o valor esperado de filhos de um nó em avalanche que farão parte da avalanche é de 1.

Num sistema aberto onde é inserida energia de forma mais ou menos constante, o facto de um sistema estar abaixo do nível crítico significa que as avalanches não compensam a entrada de energia e que esta crescerá infinitamente. O facto de estar acima do nível crítico significa que a avalanche não termina e o sistema colapsará.

O mecanismo da criticalidade auto-organizada mantém um sistema num estado estacionário fora do equilíbrio que separa, como vimos, duas fases do mesmo sistema: aquela em que as avalanches pequenas, locais e ininterruptas originam a inexistência de ‘pilha’; e aquela em que a energia se acumula até infinito que é, naturalmente, um sistema fisicamente impossível atendendo à capacidade limitada do ser humano em transformar energia do meio ambiente para o espaço económico.

A nossa hipótese neste trabalho, e induzida pelos dados experimentais, é que a economia é um sistema crítico auto-organizado em torno de um ponto crítico que divide duas fases do sistema, ambos correspondentes a uma não economia. Ou seja, o equilíbrio tão insistentemente referido pelos primeiros micro-economistas, não é um equilíbrio termodinâmico no qual se podem observar fenómenos próprios de oscilações em torno de equilíbrios desse tipo, como movimentos brownianos, mas sim um estado estacionário permanentemente fora do equilíbrio. E isto faz a diferença entre conseguir e não conseguir explicar os eventos económicos extremos.



# Capítulo 3

## Modelo

O modelo que apresentamos baseia-se no fundamento da existência de uma economia e no conhecimento actual da topologia das organizações humanas, ambas consequências do facto de todos os agentes económicos serem diferentes. Baseados no princípio da especialização, vamos considerar que cada agente vai retirar energia ao meio-ambiente físico, em cada instante, para produzir trabalho e para consumir trabalho alheio. Os agentes serão organizados numa topologia de rede direccionada, em que os produtores se ligam aos consumidores, de forma a que, quer visto do lado da produção, quer visto do lado do consumo, se possa encarar como uma rede livre de escala[22]. Adicionalmente, vamos considerar que os agentes têm um comportamento não-linear quando o desbalanceamento entre a produção e o consumo atinge um dado valor limite e que este vai originar o desbalanceamento dos agentes que com eles se relacionam, provocando uma avalanche do sistema. Com isto pretendemos mostrar que este comportamento é uma consequência do facto da economia ser um sistema aberto permanentemente fora do equilíbrio.

Na secção 3.1, vamos descrever o modelo conceptual de ligação económica e como esta se relaciona com o fundamental da teoria microeconómica. Na secção 3.2, descreveremos como construímos a rede dupla livre de escala, mantendo os agentes simultaneamente como produtores e consumidores. Na secção 3.3 descreveremos a forma como simulamos o comportamento não-linear dos agentes e como este se traduz em termos macroscópicos, quer na economia real, quer no nosso modelo. Na secção 3.5, descreveremos analiticamente a forma como o sistema se mantém crítico e como os parâmetros do modelo se conjugam. Na secção 3.6, descreveremos analiticamente como a topologia dos agentes económicos influencia a forma como as quedas dos índices principais ocorrem. Na secção 3.7, finalmente, descreveremos em detalhe o modelo computacional desenvolvido para a simulação.

### 3.1 Ligação Económica e Agentes

O ponto crítico de qualquer analogia entre a Física e a Economia é o facto de cada agente económico ser diferente do seu vizinho, ao contrário daquilo que podemos assumir num fluido ou num banho termodinâmico. Mas é exactamente esta diferença que dá origem à Economia[31]. É o facto de os agentes serem diferentes que dá vantagem competitiva às sociedades com economia e é o intercâmbio de especializações que fundamenta a relação económica, como vimos anteriormente. Desta forma, podemos conceber o agente económico como um transdutor de energia do espaço físico para o espaço económico, onde retira energia do mundo físico que o rodeia para criar ligações económicas.

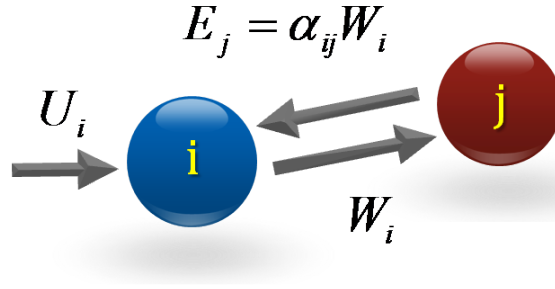


Figura 3.1: Ligação Económica

O agente económico  $i$ , representado na figura 3.1, absorve energia física para produzir o trabalho (económico)  $W_i$  recebendo em troca algo que representa o trabalho de outro agente ( $j$ ) com uma especialização distinta,  $E_j$ , que se relaciona com  $W_i$  por um factor de conversão  $\alpha_{ij}$ , adimensional, a que chamaremos abusivamente de *preço* por uma questão de facilidade de linguagem. ‘Abusivamente’ no sentido em que o preço, tal como o entendemos em economia, é uma quantidade de dinheiro que é, em si mesma, uma representação de trabalho e, por isso, tem dimensões de trabalho, não é um factor adimensional. Ao par de fluxos de sentidos opostos chamaremos, ao longo de todo o nosso trabalho, de *ligação económica*. A ligação económica é a partícula do sistema económico. Se quisermos ver o sistema como um gás, aquilo que são as métricas macroscópicas do sistema são agregações das métricas destas partículas. À ligação em que um agente fornece trabalho e recebe uma qualquer conversão desse trabalho, chamamos de ligação de produção, e à ligação em que o agente entrega uma conversão do trabalho em troca de trabalho alheio chamamos de ligação de consumo. Por uma questão de facilidade de representação, chamamos às primeiras as ligações ‘out’ e às segundas as ligações ‘in’. Estas designações são relativas a um agente porque, na realidade, toda e qualquer ligação que assumimos no nosso modelo conceptual é uma ligação de produção para um agente e de consumo para outro.



De acordo com este balanço energético, que se sustenta nos fundamentos da existência de uma economia, constituímos a ligação entre o espaço físico e o espaço económico numa equação de balanço que se estabelece em cada instante como

$$U_i = \sum_{out} (1 - \alpha_{ij})W_i + \sum_{in} (\alpha_{mi} - 1)W_m \quad (3.1)$$

em que a primeira parcela da direita representa o trabalho da especialização do agente  $i$  adquirido pelo agente  $j$  e a segunda parcela representa o trabalho que o agente  $i$  adquire ao agente  $m$ , isto é, o trabalho da especialização do agente  $m$ . O modelo que aqui propomos é, neste aspecto, semelhante ao modelo de von Neumann[36] a que nos referimos em capítulos anteriores, onde todos os agentes são simultaneamente consumidores e produtores.

Assumindo como pressuposto que cada agente tenderá, em cada instante, a formar novas ligações económicas para conseguir obter uma suficiência mais abrangente das especializações alheias e que, para isso, necessita da formação de novas ligações a partir do trabalho da sua especialização ou, fisicamente, de introduzir mais energia no sistema; temos que em cada instante vai formar-se uma equação de balanço que conjuga todas as ligações económicas do agente na forma

$$U_i = \sum_{j \in L_{out}}^{k_{iout}} W_j - \sum_{j \in L_{out}}^{k_{iout}} \alpha_{ij} W_j + \sum_{m \in L_{in}}^{k_{iin}} \alpha_{mi} W_m - \sum_{m \in L_{in}}^{k_{iin}} W_m \quad (3.2)$$

em que  $L_{out}$  é o conjunto dos agentes ao qual o agente  $i$  cede trabalho e  $L_{in}$  o conjunto dos agentes ao qual o agente  $i$  recebe trabalho, como se representa na figura 3.2. Assumindo que cada ligação se estabelece em unidades arbitrárias de trabalho, definimos como unidade a média de trabalho económico gerado sobre o universo das ligações económicas  $w = \langle W \rangle_{tot}$ , e temos

$$U_i = w \sum_{j \in L_{out}}^n 1 - w \sum_{j \in L_{out}}^n \alpha_{ij} + w \sum_{m \in L_{in}}^{n'} \alpha_{mi} - w \sum_{m \in L_{in}}^{n'} 1 \quad (3.3)$$

definindo que  $U$  se exprime em unidades de  $w$  obtém-se

$$U_i = k_{iout} - k_{iin} + \sum_{m \in L_{in}}^{k_{iin}} \alpha_{mi} - \sum_{j \in L_{out}}^{k_{iout}} \alpha_{ij} \quad (3.4)$$

Admitindo que as variações do factor de conversão das ligações em torno de um valor médio  $\alpha = \langle \alpha_{ij} \rangle_{tot}$  se anulam em cada instante, podemos fazer uma aproximação de

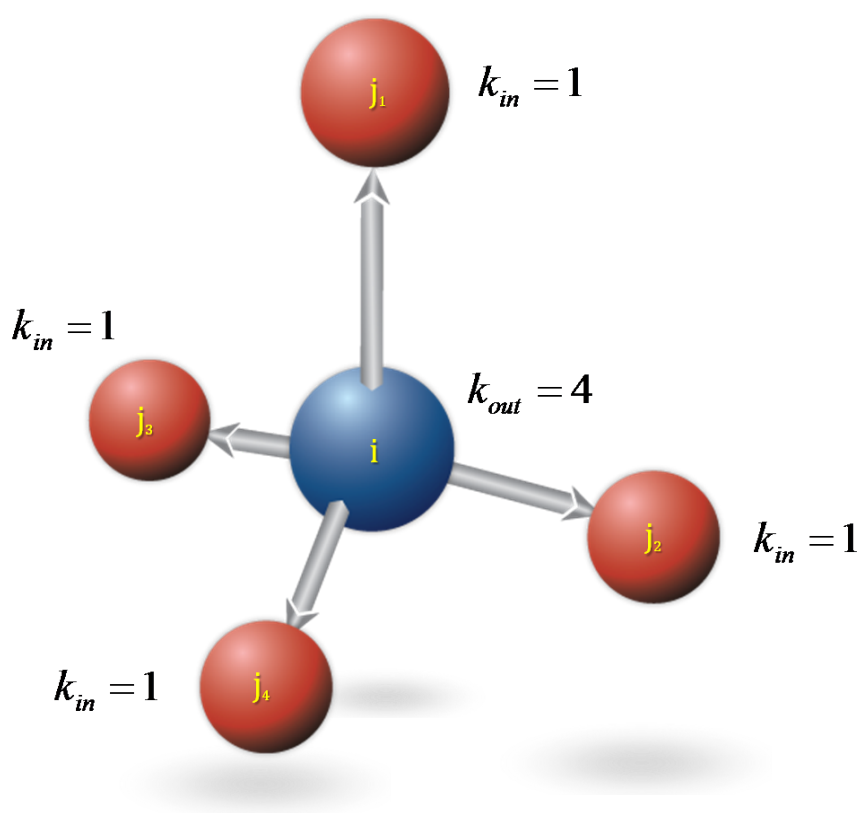


Figura 3.2: Esquema da Rede Económica

*mean-field* usando o valor médio como uma variável macroscópica que influencia o comportamento das ligações entre os agentes económicos<sup>1</sup>, temos

$$U_i = k_{i_{out}} - k_{i_{in}} + \alpha \sum_{m \in L_{in}} 1 - \alpha \sum_{j \in L_{out}} 1 \quad (3.5)$$

$$U_i = \beta (k_{i_{out}} - k_{i_{in}}) \quad (3.6)$$

com  $\beta = (1 - \alpha)$  e temos a energia física consumida em cada instante definida em função das ligações económicas que são mantidas pelo agente económico.

Em resumo, a partir do fundamento da existência de uma economia, construímos um processo microscópico a partir do qual poderemos modelar uma economia. Para tal, usámos um artifício matemático - estabelecer como unidade de trabalho de ligação a média de todas as ligações - uma vez que as unidades de trabalho não estão, nem podem estar, estabelecidas. No nosso modelo, as diferenças entre as intensidades das várias ligações possíveis numa economia reflectem-se na constituição de mais ligações com a mesma unidade  $w$ . Usámos também uma variável macroscópica,  $\alpha$  representativa do valor médio de conversão do trabalho em cada ligação, para fazer uma aproximação *mean-field*.

Sublinhe-se que não foi usada qualquer analogia com um qualquer cenário da física estatística, mas apenas a física associada à própria entidade mínima da economia, a ligação económica. Mais, o fundamento da existência de ligações económicas é a diversidade de agentes económicos. Assim, a limitação que tínhamos à partida para aplicar um formalismo derivado da física, é ultrapassada quando podemos modelar a economia como um gás de ligações com diferenças bem estabelecidas em termos das propriedades económicas dos agentes - a sua conectividade.

A física aplica este princípio inúmeras vezes - a aproximação de *mean-field* - criando modelos perfeitos a partir dos quais pode fazer aproximações aos casos reais como, por exemplo, no caso do gás ideal, em que tudo é reduzido a um conjunto de ‘bolas’ com a mesma massa, que se diferenciam apenas pela velocidade e cujo comportamento é explicado exactamente por uma variável macroscópica, que é obtida da média do quadrado dessas velocidades, chamada de ‘temperatura’.

---

<sup>1</sup>O preço é o resultado da oferta e da procura, de todas as ligações possíveis, as que existem e as que não existem e, no nosso modelo,  $\alpha$  é o resultado daquilo a que os economistas chamam de equilíbrio entre a oferta e a procura.

É importante sublinhar uma diferença substancial entre o modelo aqui apresentado e os modelos da teoria microeconómica[31, 36, 10] que é o facto de não impormos a necessidade de um equilíbrio. Assim, a energia física não se conserva no sistema económico, ela é injectada no sistema à medida que os agentes vão criando novas ligações. Com esta abordagem, assumimos que a economia é um sistema físico aberto onde não são impostas leis de conservação ou constrangimentos que impelem o sistema para uma situação de equilíbrio.

Do ponto de vista empírico, e se olharmos para a história económica da humanidade, o pressuposto de que a economia é um sistema permanentemente fora do equilíbrio é claramente mais sustentável[7] que o pressuposto de que é um sistema que tende para o equilíbrio[7]. Como exemplo disto, podemos ver na figura 3.3 a evolução do índice *Dow Jones Industrial Average* corrigido à inflação estadunidense (por ser uma das maiores séries temporais de que existe registo em economia)

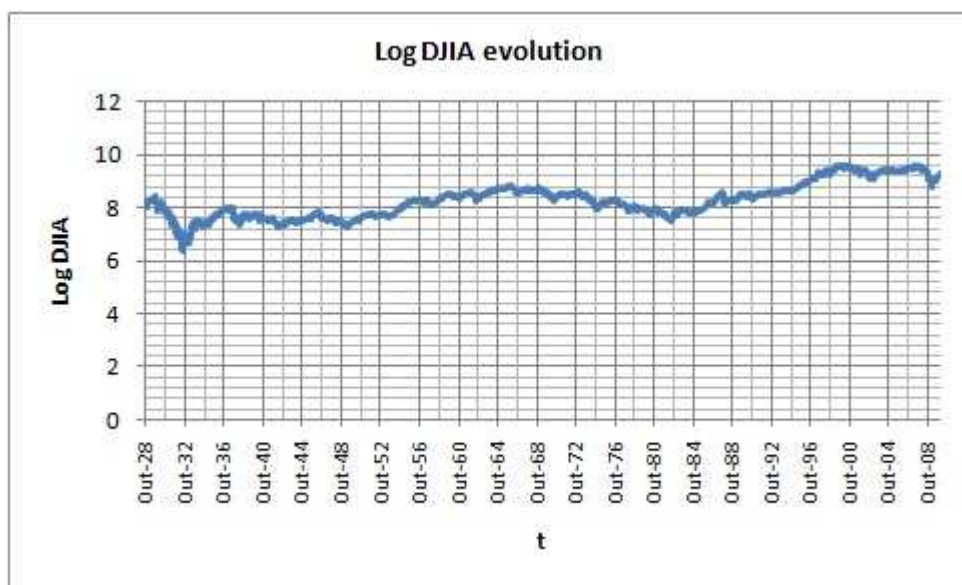


Figura 3.3: Evolução DJIA (dados obtidos de Google Finance e US Bureau of Labor Statistics)

em que podemos deduzir um crescimento exponencial completamente contrário à noção de equilíbrio. A eliminação do pressuposto de equilíbrio tem consequências muito importantes na explicação dos comportamentos não-lineares do sistema, como veremos mais à frente.

## 3.2 Topologia dos Agentes

Como vimos nos capítulos anteriores, as diferenças entre os vários agentes humanos, económicos ou não, fazem com que estes, nas suas relações, se afastem daquilo que é comum nas ligações de objectos físicos - a rede homogénea e periódica - para se organizarem em redes heterogéneas, em que os agentes que têm mais ligações são aqueles que têm mais probabilidade de encontrarem novas ligações, à semelhança dos modelos que referimos em parágrafos anteriores. Em termos económicos, no entanto, não existe nenhum estudo que nos leve a concluir com certeza de que assim é. Existem apenas indícios de que assim é, como a lei de Pareto, ou estudos em sectores económicos, muito limitados, em que a facilidade de colecta de dados o permite, como as citações em artigos científicos e a WWW[2]. Isto significa que não existe prova de que a topologia que vamos usar é, na realidade, um modelo aproximado da topologia real dos agentes económicos.

Para reproduzir a dupla rede livre de escala consideramos que temos  $N$  agentes sem qualquer ligação entre si e começamos por construir a rede de consumo. Com uma semente de três agentes (nós) ligamos todos entre si de forma a que todos sejam produtores e todos consumam a partir de todos. No final da construção da semente temos seis ligações. Por cada novo nó que introduzimos na rede, vamos seleccionar aleatoriamente uma ligação das existentes como modelo e fazer uma nova ligação, em que o produtor é o novo nó e o consumidor é, com probabilidade de 0.5, o produtor da ligação modelo e, com probabilidade de 0.5, o consumidor da ligação modelo. Como as ligações novas vão tendo mais probabilidade de irem escolhendo como consumidores os nós das ligações existentes, quanto mais ligações tem um nó mais provável é que este se torne consumidor da nova ligação. No fim da construção da rede vamos ter uma dupla topologia na rede direccionada que representa a economia, Erdős-Rényi[30] do lado produtor e Barabási-Albert[2] do lado consumidor que podemos representar como a probabilidade de ter  $k_{out}$  ligações de produção e  $k_{in}$  ligações de consumo na forma

$$P(k_{out}, k_{in}) \propto p(k_{out}; N, M) k_{in}^{\gamma} \quad (3.7)$$

em que  $\gamma$  é o expoente da rede de Barabási-Albert e  $p(k_{out}; N, M)$  a probabilidade do modelo de Erdős-Rényi para  $N$  nós e  $M$  ligações. Esta é a configuração inicial da rede económica do nosso modelo no instante  $t = 0$ .

Quando fazemos crescer a rede, mantendo o número de nós constante e criando novas ligações, cada nova ligação procura, dentro das existentes, um modelo para usar o nó produtor fazendo com que os nós produtores que têm mais ligações sejam aqueles com maior probabilidade de serem escolhidos. Para obter o nó consumidor, a nova ligação sorteia entre as existentes um modelo para usar o nó consumidor. Desta forma a rede em  $t > 0$  tende para uma dupla topologia de Barabási-Albert expressa

como

$$P(k_{out}, k_{in}) \propto k_{out}^{\gamma_{out}} k_{in}^{\gamma_{in}} \quad (3.8)$$

Uma rede assim construída é coincidente com os fundamentos da existência da economia e com os indícios de heterogeneidade dos agentes económicos. Sublinhamos uma vez mais que subjacente a estas topologias está a diferenciação dos agentes.

### 3.3 Comportamento Não-Linear

Para introduzir o nosso modelo de não-linearidade, introduzimos uma nova medida em cada agente a que chamamos de *turnover* para representar a influência do agente na economia e que traduzimos como

$$T_i = k_{i_{out}} + k_{i_{in}} \quad (3.9)$$

definida em unidades de trabalho económico, tal como a energia. O turnover mede a influência do agente na economia, em que os agentes que ajam como grandes produtores têm um valor semelhante ao dos grandes consumidores e que aqueles que são, simultaneamente, grandes produtores e grandes consumidores têm uma importância ainda maior. A definição de turnover vai-nos servir para definir o ponto de não-linearidade que, obviamente, tem que estar ao nível do agente.

Para efeitos de modelo, assumimos que nenhum agente pode estar num nível de consumo tal que a razão entre a sua energia  $U_i$  e o seu turnover  $T_i$  esteja abaixo, em módulo, de um dado valor  $U_{th}$  percentual e negativo. Em termos intuitivos, e com a ressalva de estarmos a falar em unidade de trabalho e não em dinheiro (em parte alguma desta tese o dinheiro é levado em conta sem ser como uma forma de representar trabalho económico), um valor muito baixo da razão  $\frac{U_i}{T_i}$  significa que o agente está a consumir muito para lá daquilo que produz ou, por outras palavras, está altamente deficitário pelo que vamos definir

$$d_i = \frac{U_i}{T_i} \quad (3.10)$$

como o défice percentual<sup>2</sup>. Para  $U_{th}$  fixo e negativo, estabelecemos como condição de colapso de um nó que

$$d_i < d_{th,i} \equiv \frac{U_{th}}{T_i} \quad (3.11)$$

Repare-se que o défice é uma medida do agente, o que significa que o limite é relativo à importância económica do agente, o que é coincidente com aquilo que podemos

---

<sup>2</sup>Na realidade, aquilo que conhecemos como défice da contabilidade nacional define-se da mesma forma, mas não em termos energéticos, como o fazemos aqui.

observar da utilização de rácios financeiros como medidas de probabilidade de colapso financeiro dos agentes que, obviamente, são relativos à dimensão económica do agente e não estabelecidos em valor absoluto[26]. E assim teria que ser para que se observasse uma dinâmica global do sistema com variações de magnitude que sigam uma lei do tipo Gutenberg-Richter[8, 17] numa topologia livre de escala, como aquela que descrevemos atrás.

A avalanche provocada pelo colapso de um agente, depois do caso extremo protagonizado pela sociedade de investimento Lehman Brothers Holdings Inc.[39] que gerou a maior crise económica mundial desde 1930, é uma história relativamente comum na comunicação social. No nosso modelo, a avalanche é resultado do colapso do agente que, ao entrar em colapso, quebra as ligações de consumo que tem com os seus vizinhos.

Seja então  $d_i$  o défice do agente  $i$  que, ao receber uma nova ligação de consumo, ultrapassa em valor absoluto  $U_{th}$ . Então as propriedades do agente  $i$  e dos seus vizinhos  $j$  sofrem as seguintes transformações

$$U_i \rightarrow U_i + \beta k_{i_{in}} \quad (3.12a)$$

$$T_i \rightarrow T_i - k_{i_{in}} \quad (3.12b)$$

$$U_j \rightarrow U_j - \beta k_{i_{out}} \quad (3.12c)$$

$$T_j \rightarrow T_j - k_{i_{out}} \quad (3.12d)$$

Este colapso vai provocar a quebra de todas as suas ligações de consumo com os seus vizinhos que terão, também eles, um novo défice a calcular a partir de um novo balanço e um novo turnover recalculados de acordo com (3.12). Se o novo nível de défice dos agentes vizinhos estiver abaixo do nível limite, eles também colapsam e, assim sucessivamente, até que os agentes numa dada vizinhança tenham um défice acima do limite e a avalanche cesse. Este procedimento é semelhante ao do modelo BTW[29], aqui aplicado aos fundamentos da existência da economia, usando as quebras das ligações económicas como forma de transferir ‘energia potencial em excesso’ prevista no modelo de pilha de areia BTW.

Note-se que a topologia dos agentes não é inócua quanto à dimensão da avalanche. Um agente com um grande turnover, se entrar em avalanche, vai provocar uma avalanche de grandes dimensões porque vai ter muitos agentes a ele ligados e cujo balanço energético dele depende. Dada a direccionalidade da rede, quando se quebram as ligações de consumo que têm um contributo negativo para a energia do agente, estão a quebrar-se ligações de produção nos agentes vizinhos que têm, aí, um contributo positivo.

### 3.4 Factor de conversão de trabalho (preço)

Até agora vimos o funcionamento do modelo como um mecanismo de troca de ligações onde os agentes se ligam uns aos outros mediante mecanismos de ligação preferencial. Como referimos anteriormente, os coeficientes de conversão  $\alpha_{ij}$  não são preços mas sim factores de conversão entre formas de trabalho e, respeitando a lei da oferta e da procura, à medida que as ligações vão sendo criadas entre os nós e vão sendo formados novos balanços energéticos temos que assumir que os coeficientes de conversão não são iguais entre duas ligações distintas e, mais, não podem ser constantes no tempo porque os nós que as ligações unem vão sofrendo alterações na sua oferta e na sua procura à medida que novas ligações vão sendo criadas.

Então encarando  $k_{in}$  como representativa da oferta (há mais nós a ligarem-se para produzir) e  $k_{out}$  como representativa da procura (há mais nós a consumirem a produção deste nó) então o factor de conversão  $\alpha_{ij}$  tem que crescer monotonamente com  $k_{out}$  e decrescer com  $k_{in}$ . Adicionalmente, consideramos que deve cumprir dois requisitos adicionais. O primeiro é que deverá sempre ser positiva, isto é, não existe trabalho cedido em troca de mais trabalho cedido. O segundo requisito é que as derivadas devem decrescer em módulo conforme uma das conectividades,  $k_{in}$  ou  $k_{out}$ , vai dominando a outra ou, de outra forma, quando  $|k_{out} - k_{in}| \rightarrow \infty$  que designaremos por poder negocial. Por exemplo, se vamos a um supermercado comprar um refrigerante temos um  $k_{out}$  que domina o  $k_{in}$  e, por isso, o facto de o comprarmos ou não vai ter uma influência muito reduzida no preço e a ligação faz-se dominada pelo  $k_{out}$ . Se, por outro lado, estamos numa relação em que somos um dos poucos clientes, aí temos uma influência real na formação do preço, porque  $k_{out}$  e  $k_{in}$  são da mesma ordem de grandeza. Então, temos

$$k_{out} \gg k_{in} \Rightarrow \alpha_{ij} \sim \alpha_{max} \quad (3.13a)$$

$$k_{out} \ll k_{in} \Rightarrow \alpha_{ij} \sim \alpha_{min} \quad (3.13b)$$

Tendo em atenção estes requisitos necessitamos de materializar o factor de conversão numa entidade matemática passível de ser processada num modelo numérico. Neste sentido, estabelecemos que o factor de conversão é definido por

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{1 + e^{-c(k_{out,i} - k_{in,j})}} \quad (3.14)$$

com  $c > 0$  como parâmetro. O numerador 2 surge como forma de fazermos o ponto médio da função de degrau em 1.

Repare-se que não estamos a impor nenhuma condição macroscópica sobre a formação do factor de conversão, nem estamos a impor uma condição de equilíbrio geral -  $\alpha_{ij}$  depende apenas dos nós que une. Há que fazer a ressalva que (3.14) é uma função



que escolhemos para satisfazer os requisitos que a teoria microeconómica e as relações económicas impõem. Nada nos indica, para além disso, que o factor de conversão tem esta forma. No entanto, não tendo esta forma, terá uma forma aproximada que cumpra exactamente com os mesmos requisitos. Mais à frente, reunimos as escolhas para os termos do modelo num único pressuposto que, como veremos, limita substancialmente as escolhas dos termos do modelo.

### 3.5 Condição de Criticalidade

Usando o método contínuo de Barabási-Albert-Jeong[3], em cada vez que adicionamos uma ligação pelo mecanismo de ligação preferencial, podemos escrever a taxa de variação do número de ligações de um dado nó por

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^N k_j} \quad (3.15)$$

em que  $m$  é a taxa de ligações que se formam em cada instante e  $N$  é o número de nós do sistema. Atendendo a que no nosso caso estamos a formar duas redes, a de produção e a de consumo, a rede de que estamos a falar neste caso é a de consumo.

Relativamente à formação de redes por ligação preferencial pelo modelo de Barabási-Albert[1], que é caracterizada pela ligação preferencial e pelo crescimento por nós, o nosso modelo difere em dois factores. O primeiro, é que a rede se forma como uma rede de Barabási-Albert até que o número total de nodos esteja inserido na rede e, daí em diante, as ligações são criadas sem que exista adição de nós, isto é, são criadas entre os  $N$  nós já existentes. O segundo, é que a rede é direccionada e em cada adição de uma ligação esta só contribui uma vez para a conectividade global do sistema, ao contrário das redes não direccionadas em que contribui duas vezes. Assim, temos

$$\sum_{j=1}^N k_j = mt \quad (3.16)$$

em que  $t$  é o tempo desde o início do sistema, o que representa o número total de ligações no sistema. Então

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{mt} \quad (3.17)$$

cuja solução é

$$k_i = k_i(t_i) \frac{t}{t_i} = m \frac{t}{t_i} \quad (3.18)$$

em que  $t_i$  é o instante em que o nó entrou na rede de consumo ou, de forma equivalente, recebeu a primeira ligação de consumo, e  $k_i(t_i)$  o valor da conectividade na rede de

consumo em  $t_i$  que podemos assumir como sendo  $m$ . Recorrendo à abordagem usada em[3], a probabilidade de o número de ligações no nó  $i$  ser inferior a um dado valor  $k$  equivale à probabilidade do instante em que foi adicionado à rede ser maior do que o instante característico de um nó com conectividade  $k$

$$P(k_i < k) = P(t_i > \frac{mt}{k}) \quad (3.19)$$

Note-se que não existe aqui qualquer limitação pelo facto de o número de nós ser constante. Uma vez que a rede é direccionada, cada ligação recebida por um nó equivale à adição de um novo nó na rede, porque a relação entre os nós não é simétrica. Assim, a formulação que é válida para a adição de nós numa rede adireccionada continua válida para a adição de ligações numa rede direccionada. Como estamos a adicionar uma ligação em cada instante, a densidade de probabilidade de  $t_i$  é constante e é dada por

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t} \quad (3.20)$$

em que  $m_0$  é o número de ligações inicial. Então, refazendo (3.19) temos

$$P(t_i > \frac{mt}{k}) = 1 - P(t_i \leq \frac{mt}{k}) = 1 - \frac{mt}{k(t + m_0)} \quad (3.21)$$

Finalmente, vem

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i < k)}{\partial k} = \frac{mt}{m_0 + t} k^{-2} \quad (3.22)$$

o que nos dá o valor para a probabilidade de encontrarmos um nó com  $k$  ligações de consumo quando  $t \rightarrow \infty$

$$P(k) \sim mk^{-2} \quad (3.23)$$

A abordagem para a rede de consumo é válida para a rede de produção.

Como vimos atrás, o sistema está crítico se o valor esperado de nós vizinhos que entram em avalanche em cada geração é de 1. Para tal, precisamos de saber a probabilidade de quebrar de cada vizinho de um nó que quebra. Ora, temos a partir de (3.12) que um nó ao entrar em colapso corta as ligações de consumo com os seus  $k_{in}$  vizinhos e, desta forma, provoca uma redução do número de ligações de trabalho  $k_{out}$ . Significa que podemos encarar o evento de colapso de um nó vizinho como

$$k_{i_{out}} - k_{i_{in}} > u_{th}(k_{i_{out}} + k_{i_{in}}) \quad (3.24a)$$

$$k_{i_{out}} - 1 - k_{i_{in}} \leq u_{th}(k_{i_{out}} - 1 + k_{i_{in}}) \quad (3.24b)$$

que, reorganizando, podemos escrever

$$k_{i_{out}}(1 - u_{th}) > k_{i_{in}}(1 + u_{th}) \quad (3.25a)$$

$$k_{i_{out}}(1 - u_{th}) - 1 \leq k_{i_{in}}(1 + u_{th}) - u_{th} \quad (3.25b)$$

ou

$$k_{i_{out}} > \alpha k_{i_{in}} \quad (3.26a)$$

$$k_{i_{out}} \leq \alpha k_{i_{in}} + 1 \quad (3.26b)$$

com  $\alpha = \frac{1+u_{th}}{1-u_{th}}$ . Significa que a probabilidade de um nó vizinho de um nó que quebra  $P_{br}$  participar na avalanche é igual à probabilidade de ocorrência do evento descrito por (3.26), isto é

$$P_{br} = P(\alpha k_{i_{in}} < k_{i_{out}} \leq \alpha k_{i_{in}} + 1) \quad (3.27)$$

como só temos um inteiro no intervalo e  $k_{i_{out}}$  é inteiro

$$P_{br} = \sum_{j=[\alpha k_{i_{in}}]+1}^{[\alpha k_{i_{in}}]+1} P(k_{i_{out}} = j) \quad (3.28)$$

$$P_{br} = \frac{1}{2} (P(k_{i_{out}} = \alpha k_{i_{in}}) + P(k_{i_{out}} = \alpha k_{i_{in}} + 1)) \quad (3.29)$$

Usando (3.23), temos que a probabilidade de ocorrência de uma avalanche num nó vizinho é dada por

$$P_{br} = \frac{1}{2} (m([\alpha k_{i_{in}}] + 1))^{-2} + m([\alpha k_{i_{in}} + 1])^{-2} \approx m(\alpha k_{i_{in}}))^{-2} \quad (3.30)$$

Tendo o valor da probabilidade de quebra em função de  $k_{i_{in}}$ , o valor esperado de filhos de um nó em quebra que vão incorporar a avalanche é dado por

$$\sum_{k_{i_{in}}=1}^{\infty} k_{i_{in}} P(k_{i_{in}}) P_{br} = 1 \quad (3.31)$$

atendendo que o valor máximo

$$\sum_{k_{i_{in}}=1}^{\infty} k_{i_{in}} m^2 k_{i_{in}}^{-2} (\alpha k_{i_{in}})^{-2} = 1 \quad (3.32)$$

$$\sum_{k_{i_{in}}=1}^{\infty} (k_{i_{in}})^{-3} = \alpha^2 m^{-2} \quad (3.33)$$

obtém-se, finalmente, a condição para que o sistema se mantenha crítico

$$\alpha^2 = m^2 \zeta(3) \quad (3.34)$$

onde  $\zeta$  é a função zeta de Riemann. E, assim, fica fechado o modelo uma vez que  $\alpha$  é função exclusiva de  $u_{th}$  e  $m$  é equivalente ao *grão* da nossa pilha de areia, que temos que ajustar à ocorrência das avalanches, pelo que podemos encarar como um grão efectivo na pilha de areia.

Porque é que expressão (3.34) é importante no nosso modelo? No modelo que aqui descrevemos, a forma do factor de conversão  $\alpha_{ij}$ , a forma do turnover, ou mesmo a da energia económica  $U$ , traduzem os requisitos impostos pela teoria microeconómica e pelo abandono dos pressupostos de equilíbrio termodinâmico. No entanto, a sua forma é relativamente arbitrária, desde que cumpra com os requisitos. Por exemplo, definimos o turnover como  $k_{in} + k_{out}$  para reflectir a importância de cada nó na economia, mas uma combinação linear das duas variáveis ou uma potência da soma também cumpriria com os requisitos. Na realidade, qualquer função monótona crescente de  $k_{in}$  e  $k_{out}$  cumpriria com os requisitos específicos do turnover. O mesmo raciocínio pode ser aplicado à forma de  $\alpha_{ij}$  e de  $U$  e, sem outra informação adicional, o nosso modelo seria um numa infinidade de modelos que poderiam ser construídos a partir de um espaço de funções que cumprissem com os requisitos individuais de cada factor e, para todos os efeitos, esta escolha em particular seria um pressuposto do modelo.

No entanto, temos a condição de criticalidade (3.34) que resulta da escolha de todos os factores e que fecha o modelo se os dados experimentais mostrarem que o comportamento do sistema segue uma lei do tipo (2.71). A sua existência limita o espaço de funções às que cumprem com os requisitos individuais e com quais existe uma condição de criticalidade. E com isto temos um único pressuposto para a validade do modelo como representação da realidade económica: *a influência no resultado das possíveis escolhas no espaço de funções que cumpram com os requisitos individuais de cada factor e que satisfaçam uma condição de criticalidade é desprezável.*

### 3.6 Topologia e Dimensão da Avalanche

Se usarmos o teorema de Otter para a magnitude das avalanches, expresso em (2.70), não temos, ainda, a expressão analítica que nos dá a dimensão das avalanches no nosso sistema económico. Isto porque enquanto o modelo de processo multiplicativo de Otter[28] é baseado exclusivamente em nós e as ligações servem apenas para os ligar, no nosso modelo a dinâmica da economia faz-se em função das ligações, embora a contabilidade se efectue nos nós.

Se é  $r$  o número de nós no processo multiplicativo que representa a avalanche e sabendo a probabilidade de um nó participar nessa avalanche por (3.30) então podemos escrever

$$r = Lm(\alpha k_{in})^{-\gamma} \quad (3.35)$$

em que  $L$  é a dimensão do sistema e  $\gamma$  é o expoente da rede que assumimos, que poderá ser diferente do valor 2 expresso em (3.30). Então, se conhecemos  $r$ , o número total de nós que são envolvidos, a quantidade de ligações envolvidas na avalanche é

dada por

$$k_{in} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{r}{mL} \right)^\gamma \quad (3.36)$$

Assim, se a distribuição de avalanches de nós é dada por

$$P(Z = r) \propto r^{-\frac{3}{2}} \quad (3.37)$$

a distribuição de avalanches por ligações é dada por

$$P(K = k) \propto k^{-\frac{3}{2}\gamma} \quad (3.38)$$

Esta expressão é importante no sentido em que relaciona o expoente da rede  $\gamma$  com o expoente medido nas quebras dos índices macroscópicos dos sistemas económicos, usando como ponto de ligação os primeiros princípios da teoria microeconómica.

De forma a facilitar a leitura dos dados experimentais é útil usar  $P(K \geq k)$  em vez de  $P(K = k)$ . Então

$$P(K \geq k) \propto \int_k^{+\infty} s^{-\frac{3}{2}\gamma} ds \propto k^{-\frac{3}{2}\gamma+1} \quad (3.39)$$

## 3.7 Implementação Computacional

O modelo computacional foi desenvolvido em C++ e quase exclusivamente numa arquitectura orientada a objectos. O modelo consiste em três objectos fundamentais: a ligação, o nó e a economia. Uma economia é uma colecção de nós que se ligam entre si por ligações, objectos que descreveremos em detalhe.

A ligação é o objecto computacional que encapsula a referência a um nó de origem (produtor) e um nó de destino (consumidor) e é dotada de um factor de conversão, tal como definido em 3.4

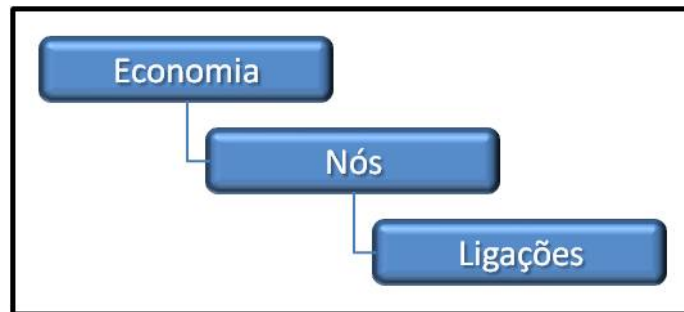


Figura 3.4: Diagrama de objectos

O nó é o objecto computacional que representa o agente económico e encapsula, para os nossos efeitos, uma colecção de ligações que se materializa no nó: aquelas em que é o produtor e uma colecção de referências a ligações em que é o consumidor (e que estão materializadas nos respectivos nós produtores). Apesar de o elemento fundamental ser a ligação, é no nó que se calculam o balanço e o turnover e é o nó que tem um limite abaixo do qual, quando o défice desce, se dá o colapso.

O objecto economia encapsula a colecção de nós (agentes) e, com ela, o conjunto das ligações. Encapsula, também, a dinâmica da economia usando o evento de criação de uma ligação económica como a contagem do relógio. Este objecto é criado usando como parâmetro o número  $N$  de nós da rede. No instante  $t=0$ , o objecto economia cria a rede inicial usando uma semente de três nós ligados entre si, e usando o algoritmo indicado acima para criar uma rede livre de escala do lado consumidor e uma rede aleatória (Erdős-Rényi) do lado produtor. Uma vez criada, o relógio é accionado para criar uma ligação em cada instante, ligação essa que usa como modelo uma ligação sorteada entre as existentes para obter o nó produtor e sorteia outra ligação para obter o nó consumidor, de modo a que a tendência seja a de criar uma rede de escala livre, quer do lado consumidor, quer do lado produtor.

Após criar a ligação, o objecto economia consulta cada um dos nós por ordem aleatória, através de um *burning algorithm*[9], para apurar se entraram em colapso (ver eqs. (3.12)). Se um nó está em condições de colapso, à colecção dos seus nós vizinhos é aplicado o mesmo algoritmo, recursivamente, até que nenhum dos nós da economia esteja em condição de colapso.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Mercados Reais

A adequação do modelo foi verificada usando dados reais de mercados organizados das maiores economias do mundo. Os índices principais usados foram:

- All Ordinaries Index (**ALLORDS**) - índice de títulos de capital (acções) retirado da bolsa de valores australiana e entendido como representativo da respectiva economia;
- Cotation Assistée en Continu 40 (**CAC**) - índice de acções retirado da bolsa de valores de Paris e entendido como representativo da economia francesa;
- Deutscher Aktien-Index (**DAX**) - índice de acções retirado da bolsa de valores de Frankfurt e entendido como representativo da economia alemã;
- Dow Jones Industrial Average (**DJIA**) - índice de acções retirado da bolsa de Nova Iorque e entendido como representativo da economia dos EUA;
- Financial Times Stock Exchange Index (**FTSE**) - índice de acções retirado da bolsa de valores de Londres e entendido como representativo da economia inglesa;
- Hang Seng Index (**HSI**) - índice de acções retirado da bolsa de valores de Hong Kong e entendido como representativo da economia chinesa;
- Nihon Keizai Shimbun Heikin Kabuka 255 (**NIKKEI**) - índice de acções retirado da bolsa de valores de Tóquio e entendido como representativo da economia japonesa;
- Chicago Board of Exchange Interest Rate 10 - Year T-No (**CBOE IR10Y**) - índice de opções sobre taxa de juro retirado da bolsa de valores de Chicago e entendido como representativo da economia dos EUA.

O conjunto de índices foi seleccionado por ter uma abrangência geográfica e cultural suficiente para detectarmos alguma dependência destes factores. Seleccionámos ainda um índice que não representa uma carteira de títulos de capital de empresas, mas sim opções sobre taxa de juro, para detectarmos alguma dependência sobre o instrumento financeiro transaccionado. Adicionalmente, atendemos a dois critérios:

- Existência de informação pública fiável com um histórico diário de, pelo menos, 10 anos;
- Representatividade de economias livres (razão pela qual escolhemos a bolsa de Hong Kong e não a de Xangai).

Para todos os índices seleccionados analisámos a distribuição das variações diárias relativas ao valor de fecho publicado, retirados do sítio Yahoo Finance. À partida, como queremos fazer uma comparação entre os valores medidos do mercado com aquilo que seria esperado analiticamente e aquilo que nos é dado pelo modelo computacional, a variação do valor de fecho de um mercado não é comparável com modelos que são orientados pelos eventos. É natural que assim seja, se estabelecemos uma física microscópica debaixo do comportamento de uma variável macroscópica. O valor de fecho representa um processo de amostragem sobre o sistema económico subjacente. Os vários processos económicos microscópicos vão funcionando, as várias ligações económicas vão sendo criadas e destruídas, e ao fim de cada dia de negociação regista-se o valor da variável macroscópica que caracteriza a economia.

Assim, para cada índice, construímos aquilo a que chamamos de *distribuição da variação orientada ao evento* onde apenas os pontos de derivada nula, da série temporal de fecho de dia, são representados. Por exemplo, dois dias seguidos de variação positiva representam apenas um ponto com a soma das variações diárias. Desta forma, a medida da variação do mercado orientada ao evento é uma amostra periódica de onde se elimina o tempo pela introdução do evento, porque a variável tempo não está presente, nem no modelo analítico, nem no modelo computacional.

Adicionalmente, para procurarmos as avalanches que são previstas analítica e numericamente pelo nosso modelo, analisámos as quedas contínuas nos índices iguais ou superiores a 1.5% , considerando que dias consecutivos com o fecho em queda constituem uma queda contínua. São sempre medidas as frequências das magnitudes acumuladas, isto é, a frequência da avalanche ser maior que um dado valor  $s$ . Isto significa que os expoentes medidos são sempre com um decréscimo de 1, assim um expoente de  $-2.5$  corresponde a um expoente de  $-1.5$  para a medida da densidade de probabilidade da magnitude.

Finalmente, apresentamos um resumo dos resultados obtidos para discussão e conclusões.



### 4.1.1 ALLORDS

Foram analisados 6555 dias de negócio da bolsa australiana entre 3 de Agosto de 1984 e 30 de Junho de 2010.

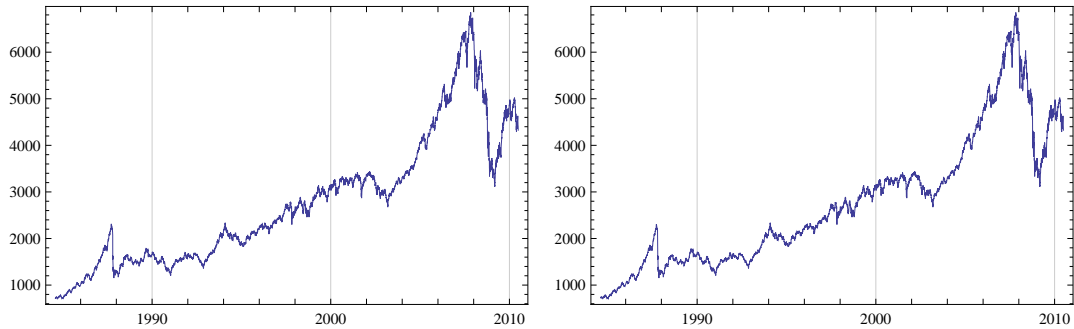


Figura 4.1: Dados da série temporal do índice ALLORDS. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0337% e desvio padrão igual a 1.0323%.

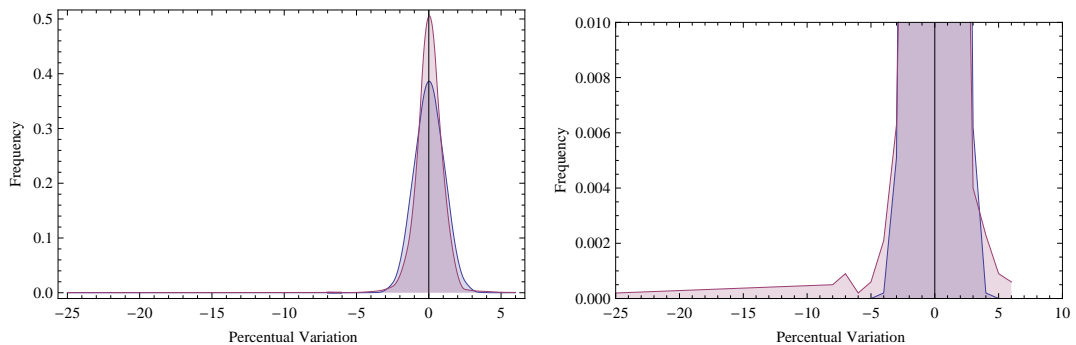


Figura 4.2: Variação diária do índice ALLORDS em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.0859% e desvio padrão igual a 2.1928%.

É evidente nas figuras 4.2 e 4.3 que a distribuição das variações não é coerente com

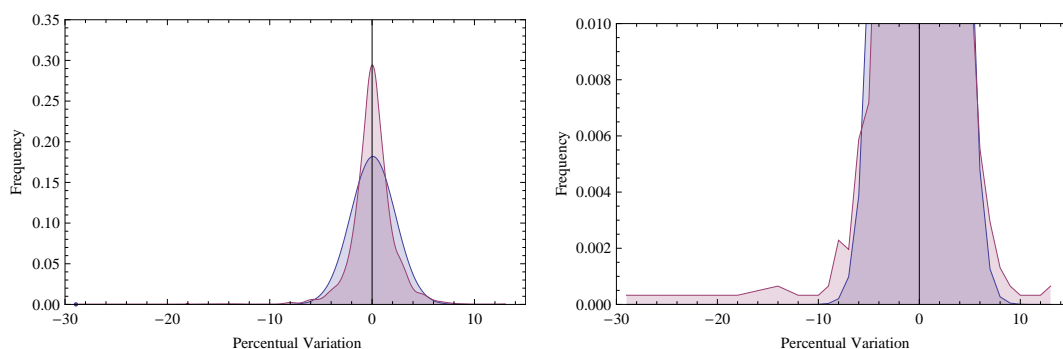


Figura 4.3: Variação orientada ao evento do índice ALLORDS em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto das caudas da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ do que a da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

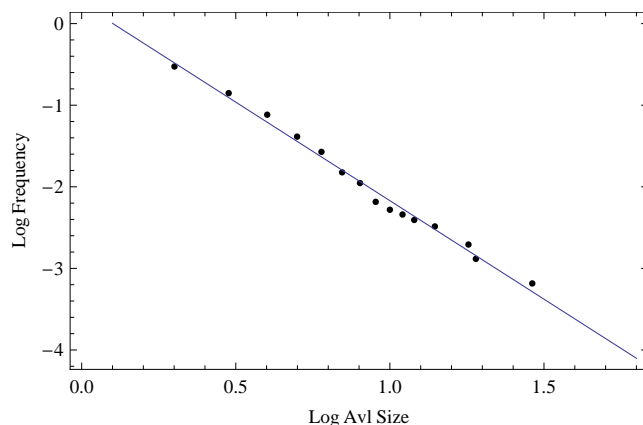


Figura 4.4: ALLORDS Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.42$ ;  $R^2 = 0.99$ ;  $t = -35$ .

Faça aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

### 4.1.2 CAC

Foram analisados 5003 dias de negócio da bolsa de Paris entre 5 de Março de 1990 e 18 de Dezembro de 2009.

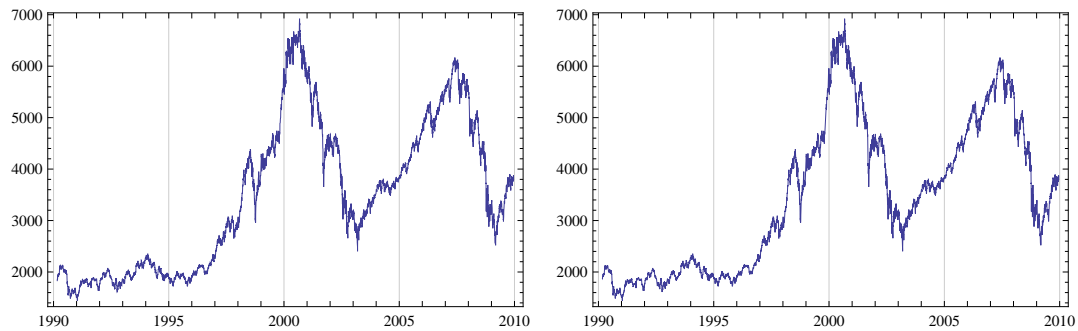


Figura 4.5: Dados da série temporal do índice CAC. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0258% e desvio padrão igual a 1.4405%.

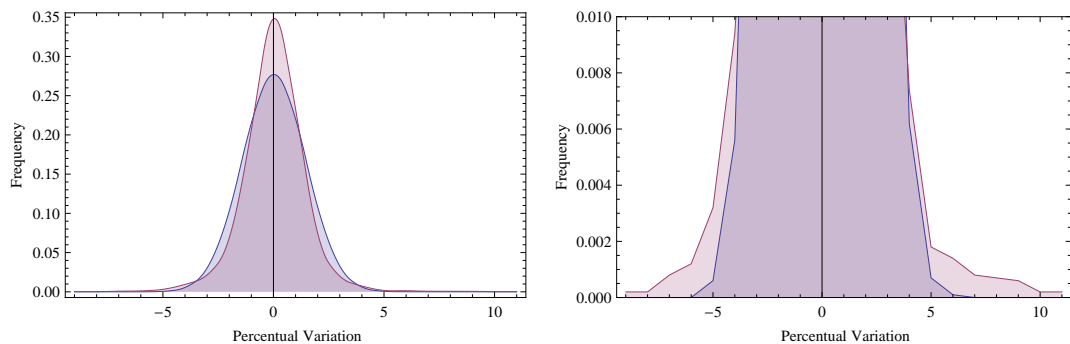


Figura 4.6: Variação diária do índice CAC em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.0681% e desvio padrão igual a 2.9015%.

É evidente nas figuras 4.6 e 4.7, pela altura que as caudas da curva medida apresentam, que são substancialmente mais ‘gordas’ que a da gaussiana. No índice CAC não se

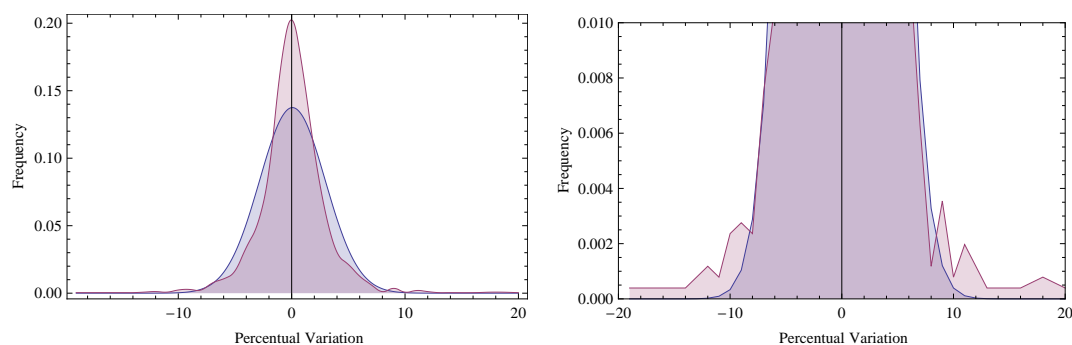


Figura 4.7: Variação orientada ao evento do índice CAC em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

observa a assimetria da curva provocada pela maior amplitude das quedas.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

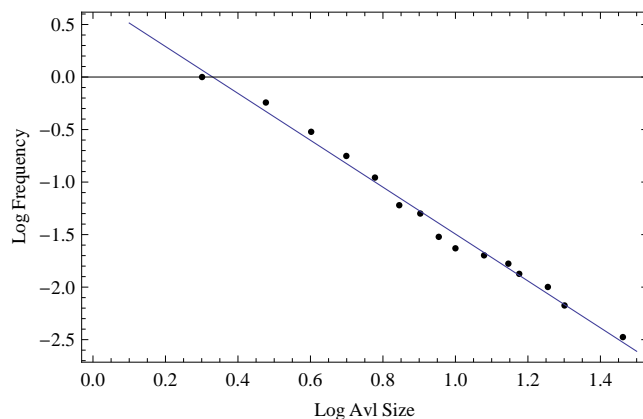


Figura 4.8: CAC Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.92$ ;  $R^2 = 0.96$ ;  $t = -17$ .

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

### 4.1.3 DAX

Foram analisados 4815 dias de negócio da bolsa de Frankfurt entre 26 de Novembro de 1990 e 18 de Dezembro de 2009.

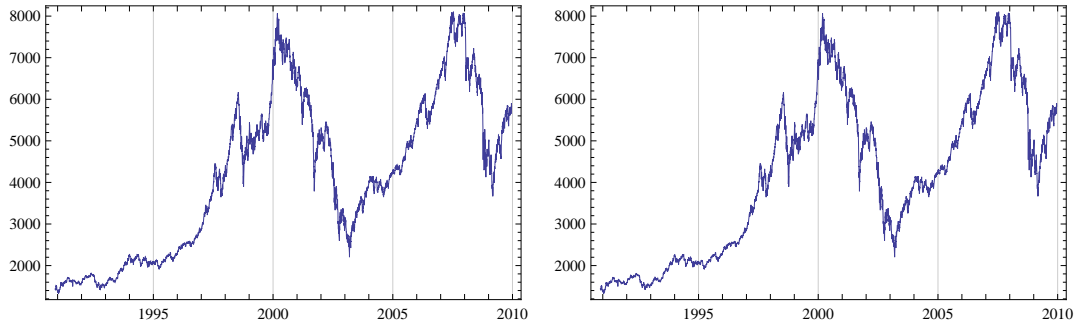


Figura 4.9: Dados da série temporal do índice DAX. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0370% e desvio padrão igual a 1.4875%.

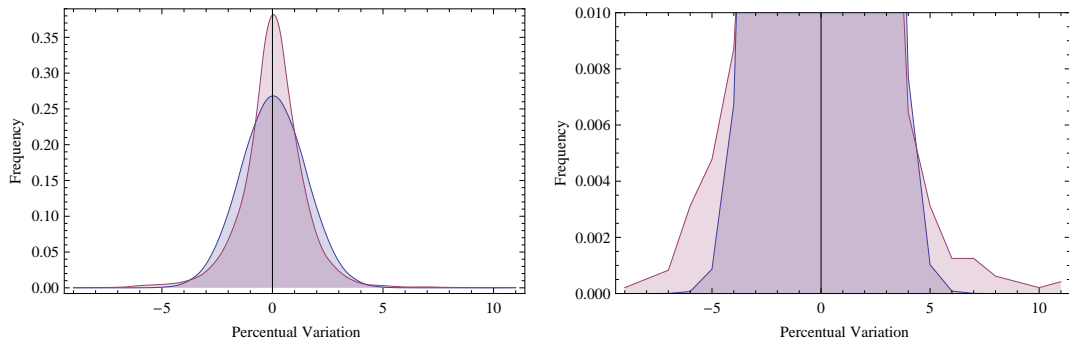


Figura 4.10: Variação diária do índice DAX em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.1074% e desvio padrão igual a 2.9940%.

É evidente na figura 4.10 e 4.11, pela altura que as caudas da curva medida apresentam, que são substancialmente mais ‘gordas’ que a da gaussiana. No índice DAX

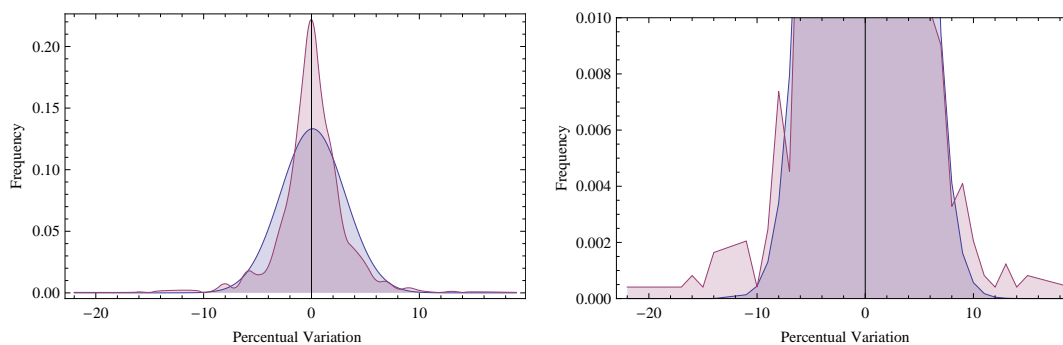


Figura 4.11: Variação orientada ao evento do índice DAX em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

não se observa a assimetria da curva provocada pela maior amplitude das quedas na variação diária, mas na variação orientada ao evento ela existe.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

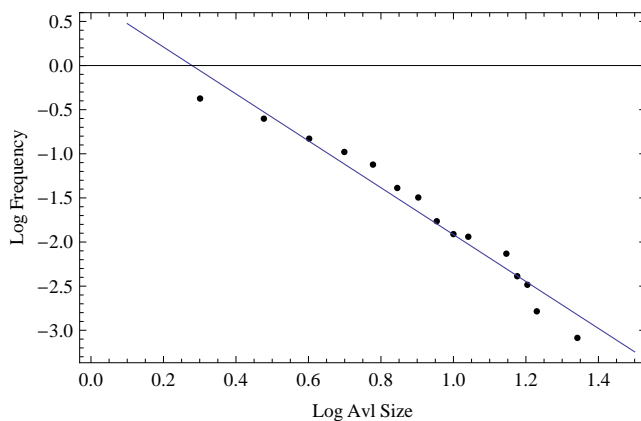


Figura 4.12: DAX Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.6564$ ;  $R^2 = 0.96$ ;  $t = -17$ .

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

#### 4.1.4 DJIA

Foram analisados 20395 dias de negócio da bolsa de Nova Iorque entre 1 de Outubro de 1928 e 18 de Dezembro de 2009.

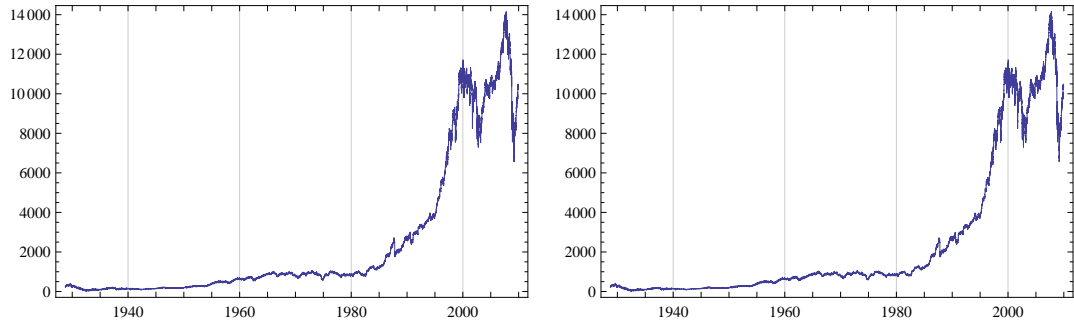


Figura 4.13: Dados da série temporal do índice DJIA. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0256% e desvio padrão igual a 1.1959%.

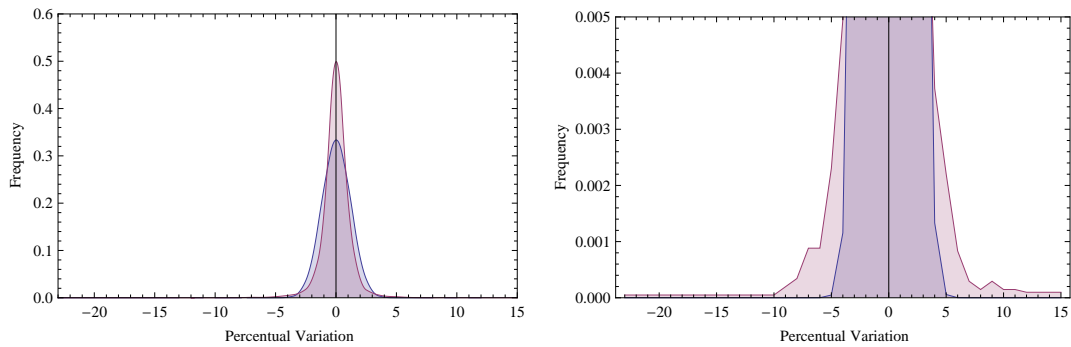


Figura 4.14: Variação diária do índice DJIA em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.7070% e desvio padrão igual a 2.4508%.

É evidente nas figuras 4.14 e 4.15 que a distribuição das variações não é coerente com uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto das caudas

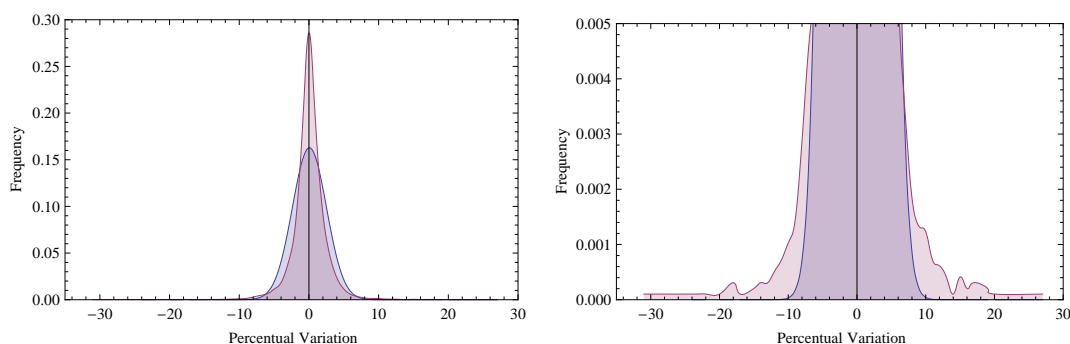


Figura 4.15: Variação orientada ao evento do índice DJIA em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ que as da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda deve confirmar uma dependência em lei de potência.

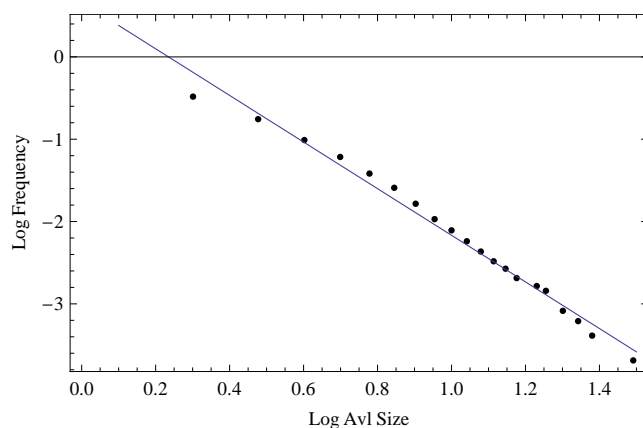


Figura 4.16: DJIA Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.83$ ;  $R^2 = 0.99$ ;  $t = -35$ .

Faça aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.



### 4.1.5 FTSE

Foram analisados 6498 dias de negócio da bolsa de Londres entre 2 de Abril de 1984 e 18 de Dezembro de 2009.

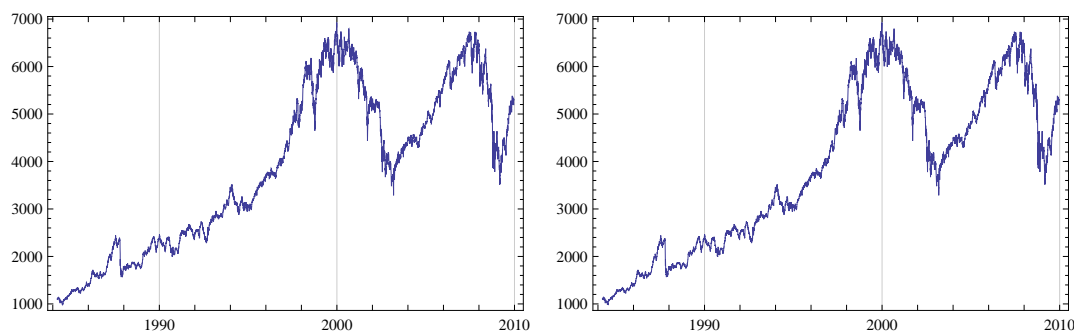


Figura 4.17: Dados da série temporal do índice FTSE. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0257% e desvio padrão igual a 1.1563%.

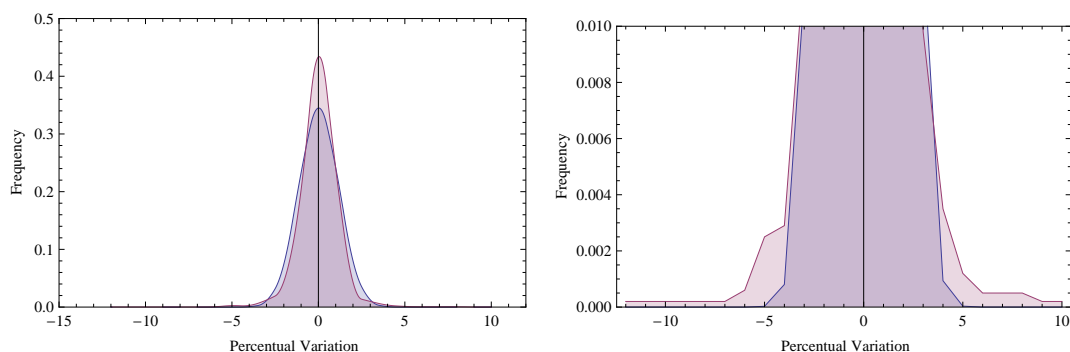


Figura 4.18: Variação diária do índice FTSE em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.0243% e desvio padrão igual a 1.8966%.

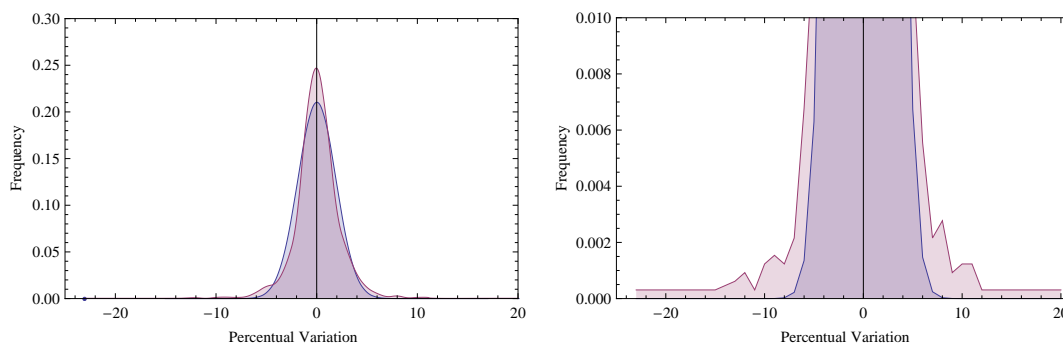


Figura 4.19: Variação orientada ao evento do índice FTSE em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo, temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

É evidente nas figuras 4.18 e 4.19 que a distribuição das variações não é coerente com uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto das caudas da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ que as da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

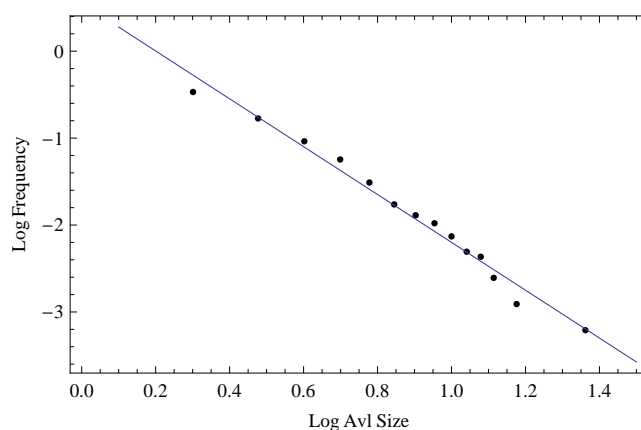


Figura 4.20: FTSE Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.75$ ;  $R^2 = 0.98$ ;  $t = -26$ .

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

### 4.1.6 HSI

Foram analisados 5701 dias de negócio da bolsa de Hong Kong entre 31 de Dezembro de 1986 e 18 de Dezembro de 2009.

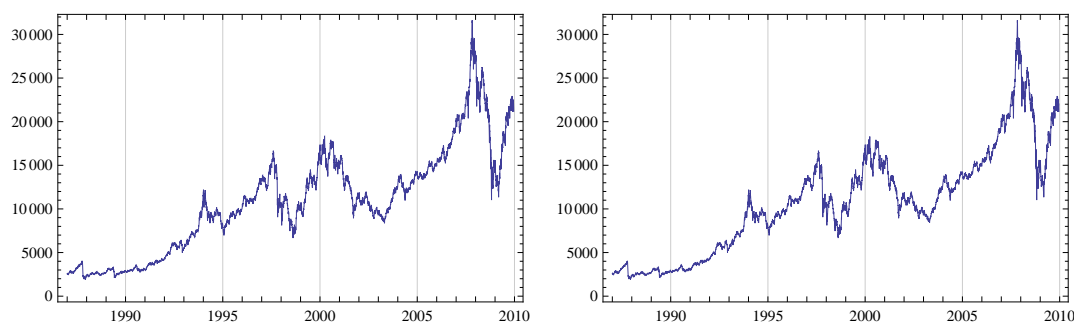


Figura 4.21: Dados da série temporal do índice HSI. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0509% e desvio padrão igual a 1.8079%.

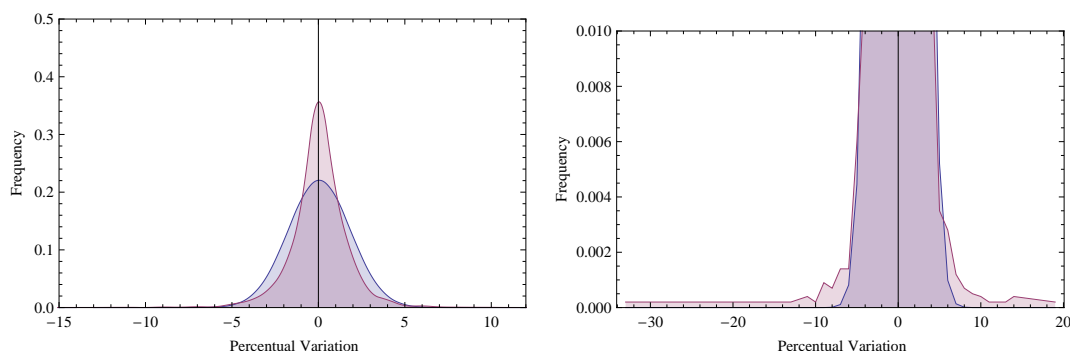


Figura 4.22: Variação diária do índice HSI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.0596% e desvio padrão igual a 2.4992%.

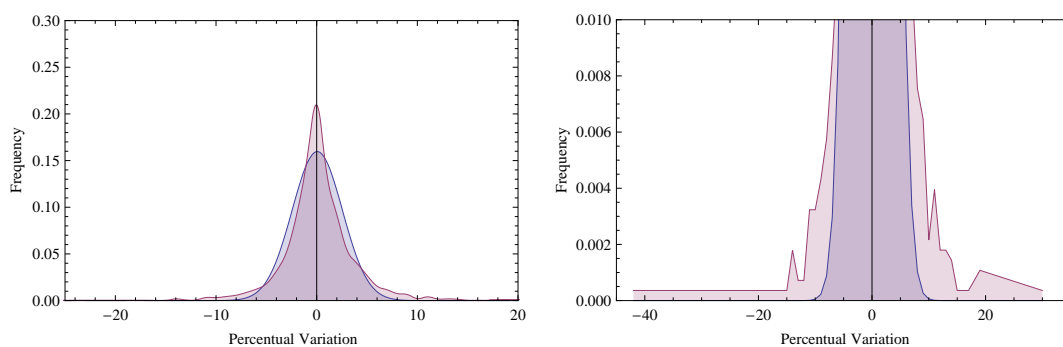


Figura 4.23: Variação orientada ao evento do índice HSI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

É evidente nas figuras 4.22 e 4.23 que a distribuição das variações não é coerente com uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto das caudas da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ que as da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

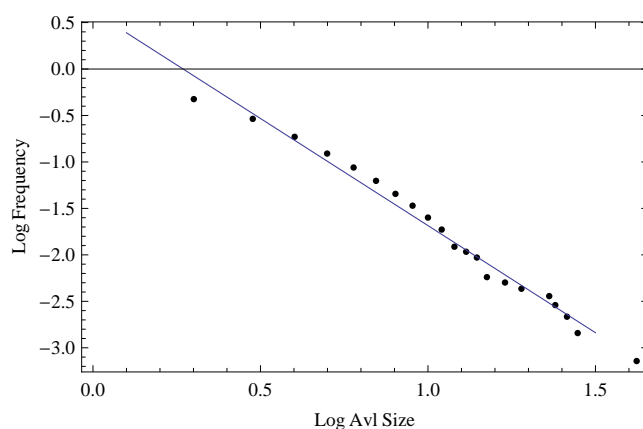


Figura 4.24: HSI Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.31$ ;  $R^2 = 0.98$ ;  $t = -35$ .

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda

superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

### 4.1.7 NIKKEI

Foram analisados 6386 dias de negócio da bolsa de Tóquio entre 4 de Janeiro de 1984 e 18 de Dezembro de 2009.

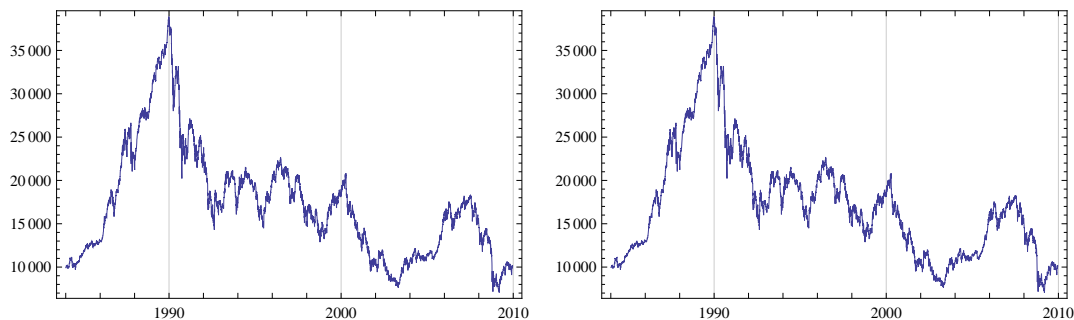


Figura 4.25: Dados da série temporal do índice NIKKEI. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a 0.0180% e desvio padrão igual a 1.4951%.

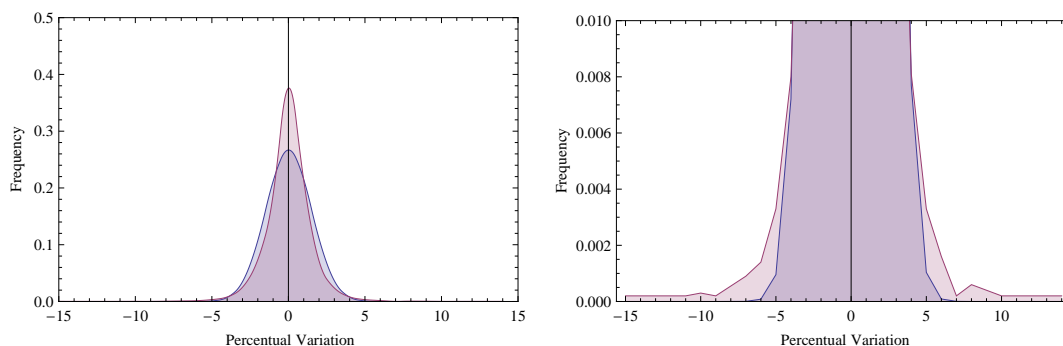


Figura 4.26: Variação diária do índice NIKKEI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a 0.0078% e desvio padrão igual a 2.3200%.

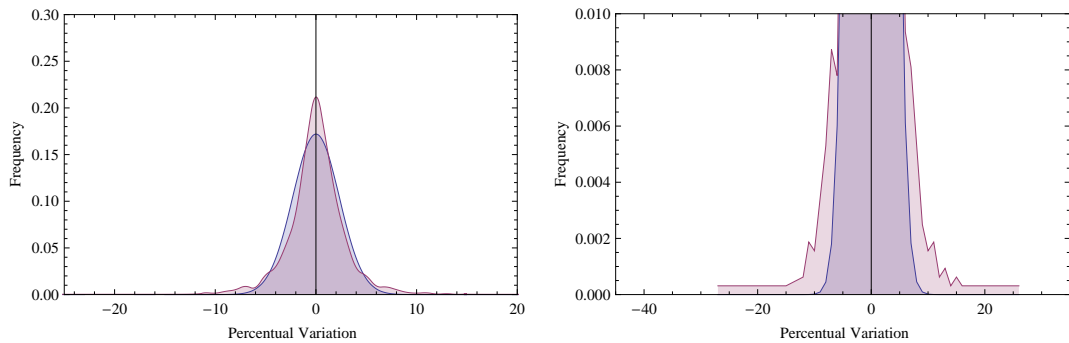


Figura 4.27: Variação orientada ao evento do índice NIKKEI em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

É evidente nas figuras 4.26 e 4.27 que a distribuição das variações não é coerente com uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto das caudas da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ que as da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

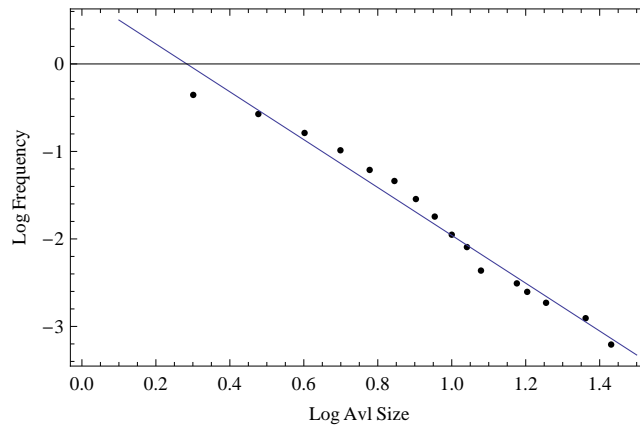


Figura 4.28: NIKKEI Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.73$ ;  $R^2 = 0.98$ ;  $t = -24$ .

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

### 4.1.8 CBOE IR10Y

Foram analisados 12116 dias de negócio da bolsa de Chicago entre 2 de Janeiro de 1962 e 30 de Junho de 2010.

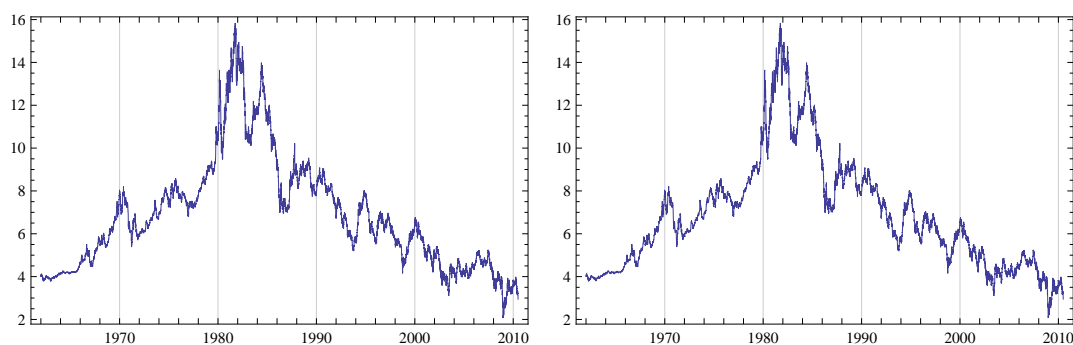


Figura 4.29: Dados da série temporal do índice CBOE IR10Y. Do lado esquerdo a curva real, do lado direito a curva apenas com os pontos de derivada nula.

As variações diárias foram agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências, com média igual a  $-0,4315\%$  e desvio padrão igual a  $1.084\%$ .

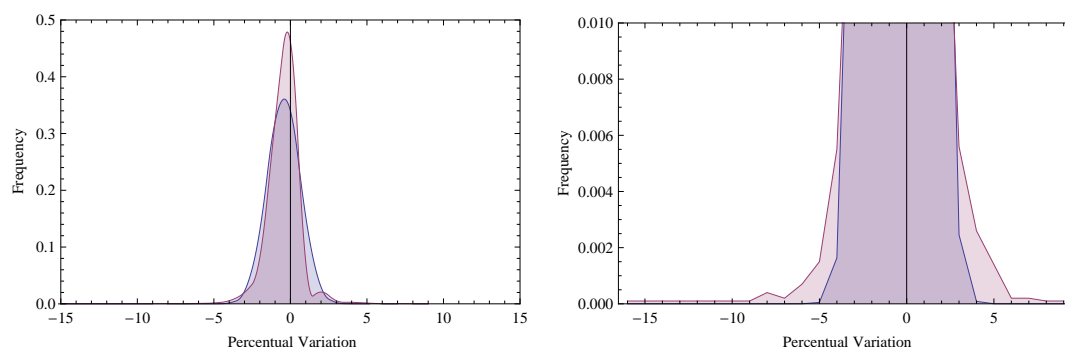


Figura 4.30: Variação diária do índice CBOE IR10Y em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos dois primeiros momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

As variações orientadas ao evento foram também agrupadas em unidades percentuais para construir uma distribuição de frequências com média igual a  $0.0215\%$  e desvio padrão igual a  $2.3398\%$ . É evidente nas figuras 4.30 e 4.31 que a distribuição



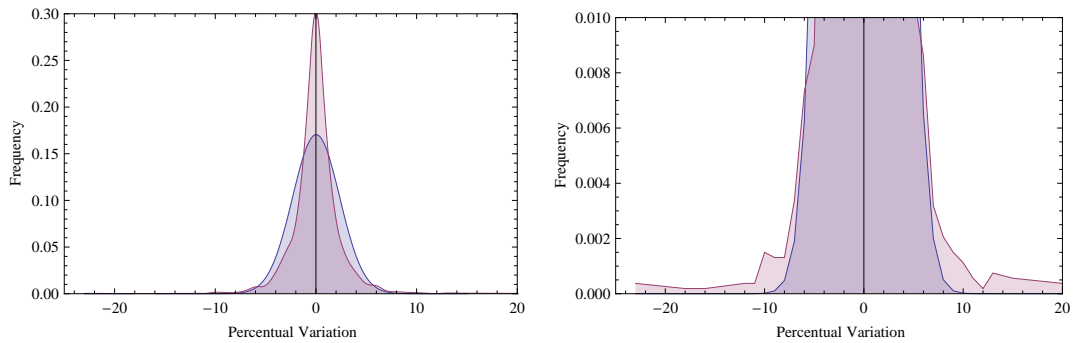


Figura 4.31: Variação orientada ao evento do índice CBOE IR10Y em comparação com a gaussiana. Do lado esquerdo temos a visão geral da comparação entre a frequência normalizada da variação medida (mais clara) e da gaussiana (mais escura), com os mesmos momentos medidos, e do lado direito o detalhe das caudas das curvas.

das variações não é coerente com uma distribuição gaussiana, quer pela assimetria da curva, quer pelo facto as caudas da curva medida serem substancialmente mais ‘gordas’ que a da gaussiana.

Partindo da hipótese de que o desvio da gaussiana se deve a um comportamento crítico, o gráfico do logaritmo da frequência em função do logaritmo do tamanho da queda confirma uma dependência em lei de potência.

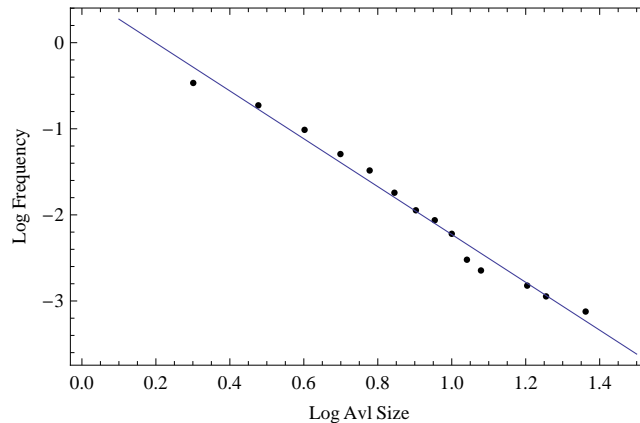


Figura 4.32: CBOE IR10Y Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.78$ ;  $R^2 = 0.98$ ;  $t = -26$ ).

Face aos indicadores de linearidade e dependência obtidos, podemos dizer estar perante uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de termos uma queda

superior a uma dada magnitude e o logaritmo dessa magnitude.

## 4.2 Modelo Computacional

### 4.2.1 Topologia

A forma como a ‘avalanche’ é materializada no nosso modelo é pela quebra das ligações de consumo que eliminam as ligações de produção nos nós vizinhos. Como as novas ligações seguem o mesmo mecanismo de ligação preferencial que referimos no capítulo 3, a forma como o sistema se mantém num estado crítico estacionário é pela reorganização da rede económica após as avalanches, aquilo a que os economistas chamam de reestruturação do tecido económico.

Para tal, foi efectuado um filme da distribuição das conectividades para o modelo com 128000 ciclos, que não é possível mostrar neste documento, e do qual retirámos quatro ‘frames’.

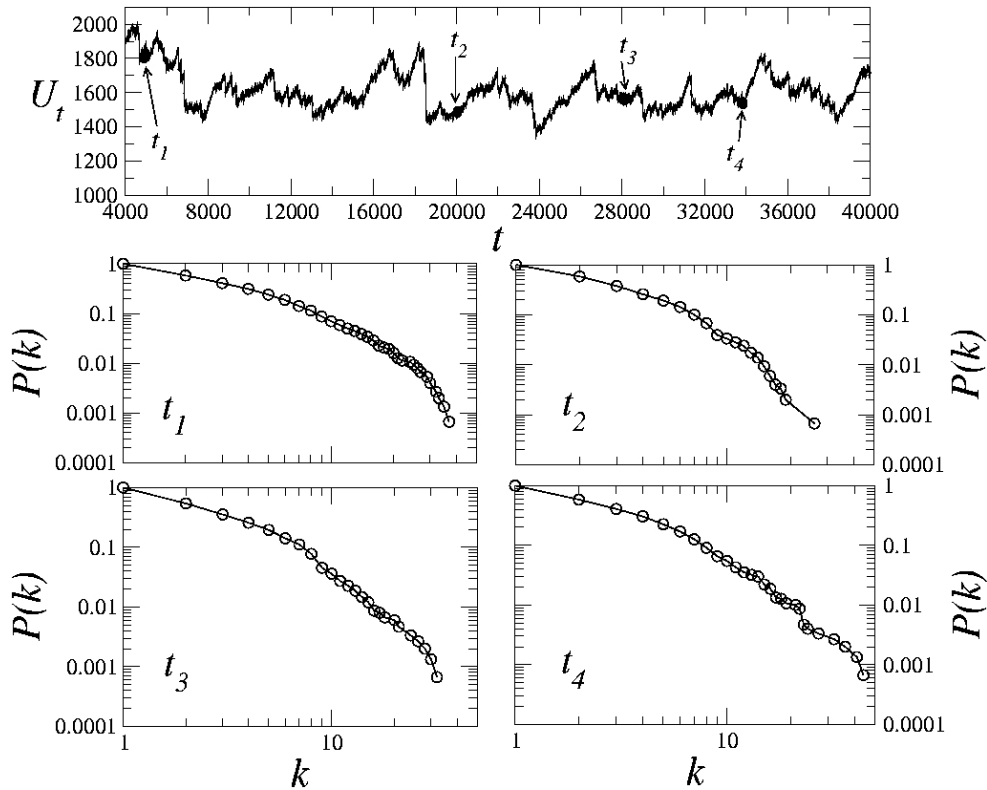


Figura 4.33: Dinâmica da distribuição da conectividade (log-log) dos nós.

Teoricamente, atendendo a que as ligações são criadas por ligação preferencial, a distribuição da conectividade deveria tender para uma lei de potência e os diagramas da figura 4.33 deveriam oscilar em torno de uma recta. Mas o mecanismo das avalanches e a imposição de os nós não serem separados da rede provocam uma situação como aquela que é evidente no diagrama. As avalanches provocam a erosão das conectividades mais elevadas e a imposição de uma ligação faz com que as pequenas conectividades não sigam a lei de potência. Isto acontece porque a primeira ligação é apenas preferencial no lado do consumo, do lado da produção é impossível, por ser a ligação que mantém o nó na rede. Na primeira figura temos o sistema depois de uma avalanche e, até à última figura, observamos a rede económica a reorganizar-se até ao ponto em que as ligações preferenciais, do lado do consumo e do lado da produção, irão provocar uma nova avalanche.

#### 4.2.2 Série sem amostragem

Na figura 4.34 apresentamos a série temporal relativa a 512000 ciclos de programa sem amostragem, isto é, a totalidade dos registos.

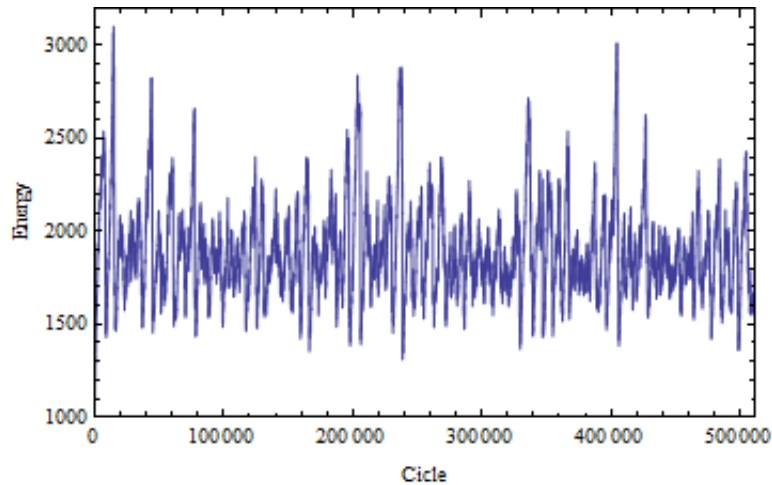


Figura 4.34: Modelo - Energia em função do ciclo de programa

A distribuição das variações, representada na figura 4.35, que no caso do modelo é orientada ao evento por natureza, é dominada pelo facto das variações positivas em cada ciclo de programa serem fixas.

Analisando as variações negativas em busca de um comportamento que verifique a hipótese de um comportamento crítico obtemos o comportamento que se ilustra na figura 4.36.

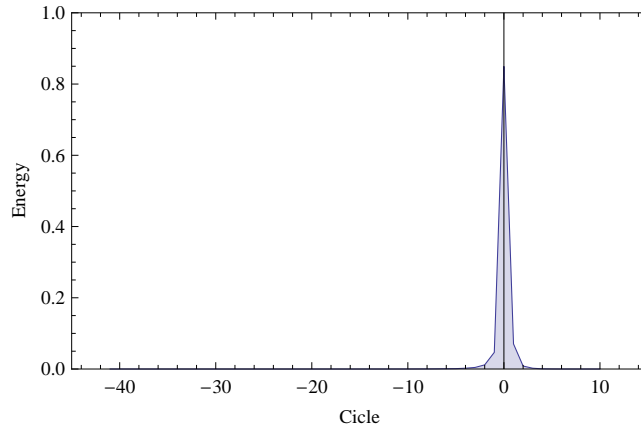


Figura 4.35: Modelo - Distribuição das variações de energia

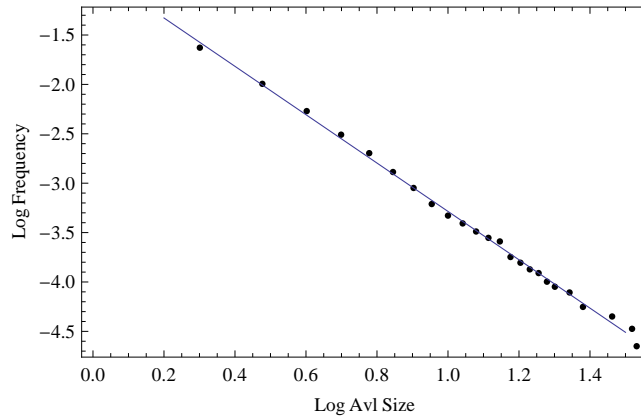


Figura 4.36: Modelo - Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.45$ ;  $R^2 = 0.998$ .

### 4.2.3 Série com amostragem

As séries temporais de índices económicos são, do ponto de vista prático, registos da medida de uma métrica do sistema feita de forma periódica. Assim, se assumirmos a existência de um mecanismo microscópico cuja agregação resulta nessa medida, então a série é o resultado de uma amostragem no tempo.

Atendendo a que a taxa de crescimento do nosso modelo é, em cada ciclo, fixa, a distribuição de probabilidade das variações de energia do modelo é limitada do lado positivo da distribuição. Assim, foi feita uma distribuição por amostragem em intervalo fixo, cuja distribuição se apresenta na figura 4.37, em que se observou em média entre cada 5 eventos.

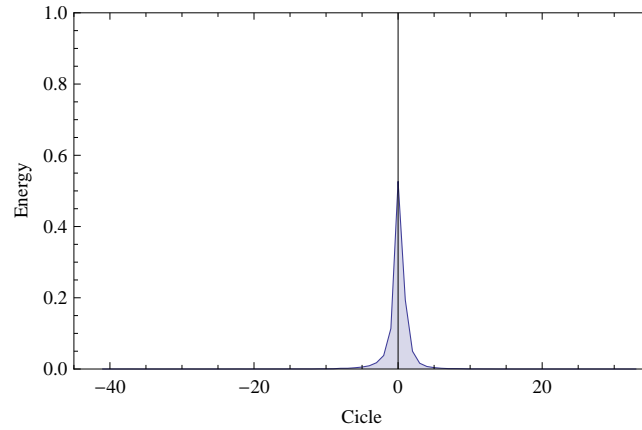


Figura 4.37: Modelo - Distribuição das variações de energia

Como se pode observar, a introdução da amostragem trouxe um maior equilíbrio à curva de distribuição das variações, embora ligeiramente desviada para a direita. Isto deve-se ao facto do sistema manter o carácter de sistema em estado crítico estacionário como se observa da lei de potência obtida a partir da série com amostragem 4.38.

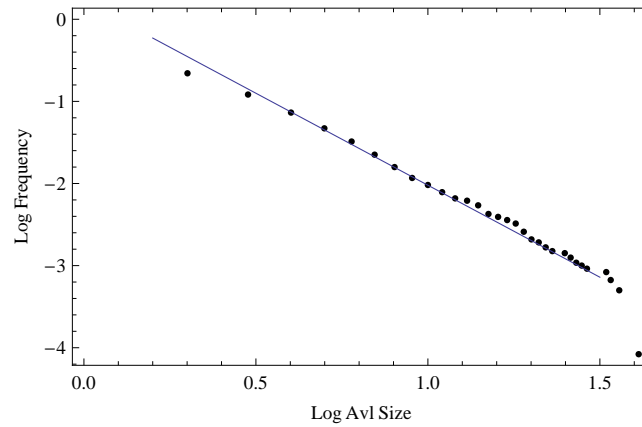


Figura 4.38: Modelo - Logaritmo da frequência em função da magnitude acumulada da queda ( $\log(P(s > s_0)) = m \log(s_0)$ ).  $m = -2.24$ ;  $R^2 = 0.97$ .

### 4.3 Resumo dos Resultados

Na figura 4.39 apresenta-se o resumo dos expoentes obtidos para as leis de potência das quedas nos índices dos mercados reais e faz-se a comparação com o valor teoricamente esperado num processo multiplicativo e com o modelo. Para definir o valor teoricamente esperado, por ser dependente do expoente da rede, usámos os dois ex-

poentes obtidos por Barabási et al. e Broder et al. e referenciados em [2, 5] para a WWW de 2.1 e 2.71.

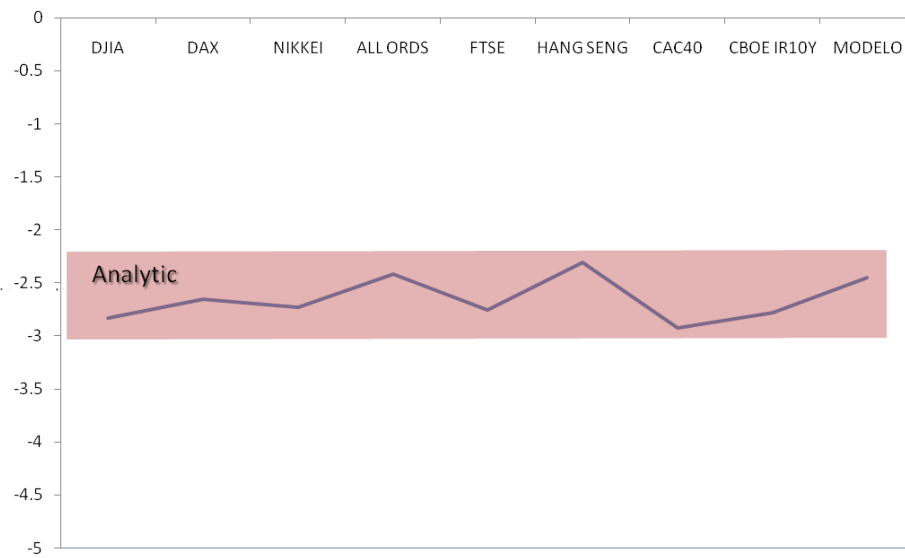


Figura 4.39: Resumo dos expoentes das leis de potência.

# Capítulo 5

## Discussão e conclusões

### 5.1 Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos indicam que, quer dos sistemas reais, quer da implementação computacional, se retira uma lei de potência para a magnitude das quedas consistente com a hipótese da economia subjacente ser um sistema em estado estacionário crítico, com um expoente próximo daquilo que seria esperado pela nossa abordagem analítica. Esta proximidade é notável, atendendo aos cenários bem comportados que são levados em conta.

No caso da abordagem analítica, é imposta pelo teorema de Otter[28], a restrição de que cada agente tenha apenas uma ligação aos seus ‘filhos’ na avalanche e, também, que não existam *loops* na rede. No caso da implementação computacional, impusemos as restrições de que o número de nós na rede económica é constante e que nenhum nó pode abandonar a rede. Adicionalmente, não temos no modelo nenhuma fonte de aleatoriedade pura do tipo força de Langevin.

Este conjunto de restrições que impomos ao modelo, por razões de simplicidade, não existe num sistema económico real pelo que existirá sempre uma diferença de comportamento nas pequenas variações entre aquilo que é previsto no nosso modelo e aquilo que é verificado nos mercados reais. O exercício que fizemos com duas amostragens diferentes revela que uma diferença na amostragem provoca um alargamento na distribuição das pequenas variações.

A nossa implementação computacional não consegue, nem estava no âmbito deste trabalho, explicar a amplitude das variações positivas observadas nos mercados reais. A razão por que isto acontece consegue entender-se a partir da condição de criticidade que obtivemos na secção 3.5. A expressão obtida que relaciona o número efectivo de ligações criadas e uma função  $\alpha$  do ponto limite de energia  $U_{th}$  estabelece

um diagrama de fases que se apresenta na figura 5.1 de forma qualitativa.

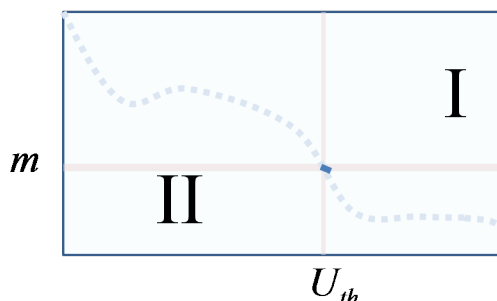


Figura 5.1: Diagrama de Fases da Economia - A fase I representa a fase de crescimento infinito e a fase II a fase em que as ligações são destruídas à medida que são criadas. A forma da curva de transição é meramente ilustrativa.

Na implementação computacional feita impomos que  $U_{th}$  fosse fixo. Tal é equivalente a assumir um  $m$  efectivo fixo, de acordo com a condição de criticalidade (3.34) e representamos na figura 5.1 pelo pequeno segmento no cruzamento entre  $m$  e  $U_{th}$ . O facto de impormos que o sistema funcione na implementação computacional apenas nesse segmento, não tem consequências ao nível da magnitude das quedas, que é o âmbito deste trabalho, mas tem consequências na amplitude do crescimento. Se, por hipótese, assumíssemos na implementação computacional que  $m$  e  $U_{th}$  fossem variáveis desde que cumprissem a condição de criticalidade, então teríamos uma derivada não-nula de  $m$  e uma largura da distribuição de variações no lado positivo completamente diferente.

Do comportamento das variações temporais é clara a incompatibilidade entre as variações observadas nos mercados reais e aquilo que seria espectável de um processo de Wiener. Mais, quer as caudas das distribuições, quer o desvio observado para a direita nos índices das economias mais livres, afastam a hipótese de o equilíbrio económico corresponder a um equilíbrio termodinâmico.

## 5.2 Conclusões

Temos que evidenciar que esta abordagem é uma abordagem física no sentido em que introduzimos um mecanismo subjacente e coerente com os fundamentos da existência de uma economia. Não é uma abordagem puramente matemática em que procuramos os coeficientes que tornam a nossa abordagem coerente com a realidade observada, cujos resultados práticos são sobejamente conhecidos das crises financeiras



mais recentes. O facto de termos uma física por debaixo da abordagem permite-nos procurar as formas dos mecanismos que estão de acordo com a realidade e não os momentos de uma distribuição que podem ser válidos apenas num momento concreto da história da economia.

Os resultados obtidos, em conjunto com primeiros princípios da Teoria Micro-económica, confirmam a nossa hipótese de trabalho de que a economia não é um sistema em equilíbrio físico, mas sim um sistema num estado estacionário crítico. Os pressupostos são, recorde-se, que a economia consiste em trocas de trabalho e que os agentes tendem naturalmente a efectuar essas trocas. Na realidade, face às teorias existentes, a nossa abordagem elimina pressupostos que nos merecem alguma atenção.

Eliminámos o pressuposto de que o equilíbrio económico é na sua natureza um equilíbrio termodinâmico e, com ele, a de que a economia é um sistema fechado. Se a economia surge das trocas de trabalho, não é possível que seja um sistema fechado, nem os dados experimentais são compatíveis com essa possibilidade.

Sendo um sistema aberto onde os agentes usam energia do meio ambiente para estabelecerem relações de trabalho - ligações - o sistema alterna entre duas fases. Aquela em que os agentes podem criar ligações de forma ilimitada e cuja taxa de destruição é inferior à taxa de criação, que representamos por fase I na figura 5.1, e que é impossível porque é divergente na energia. E aquela em que a taxa de destruição é igual à taxa de criação, que é um estado de não-economia e que representamos por fase II na figura 5.1. A transição entre estas duas fases do sistema é aquela em que a economia enquanto sistema de troca de trabalho existe e, por isso, as variações na energia devem ser tal que devem cumprir com uma lei de sistema crítico como aquela que deduzimos para a relação de criticalidade (3.34).

Os índices de sistemas de mercados reais, encarados como índices macroeconómicos, apresentam leis de potência nas quedas que são compatíveis com a hipótese de um sistema em estado estacionário crítico. O sistema computacional montado, que corresponde a uma economia dentro dos pressupostos já indicados, e com o pressuposto adicional de que o conjunto de soluções possíveis para os factores do modelo que obedecem à condição de criticalidade (3.34) conduzem a variações pequenas nos resultados, corrobora a hipótese de trabalho. Assim sendo, a conclusão deste trabalho é de que a economia é um sistema aberto em estado estacionário crítico e que as variações das quedas dos índices bolsistas principais devem ser modeladas de acordo com isso.

Além de mostrarmos que a assumpção de primeiros princípios da Teoria Micro-económica levam a uma dinâmica em que a magnitude das quedas segue uma lei de

potência, mostrámos que essa lei está intimamente ligada à topologia da organização da rede económica ao mostrar que o expoente da lei potência associada à magnitude das quedas é, a menos de uma constante multiplicativa, o mesmo expoente da lei de potência associada topologia em rede livre de escala. Isto significa que não só existe um expoente característico de um sistema crítico como sabemos justificar o seu valor de acordo com a mecânica associada às ligações humanas.

Sobre o carácter markoviano dos processos económicos, e de acordo com a conclusão anterior, do ponto de vista físico, o processo é markoviano enquanto o sistema está a criar ligações, por quanto todos os sistemas determinísticos são markovianos por natureza. A dimensão da avalanche depende da história do sistema e, consequentemente, do ponto de vista físico, é não markoviano embora, como já vimos, é sempre possível construir um conjunto de variáveis em que esse carácter exista mas, obviamente, estamos a deitar fora a física do processo.

Ainda sobre a ‘termodinâmica’ do processo, é importante que a nossa abordagem se foque, não naquilo que os vários agentes são iguais, mas sim no assumir de que são diferentes e, por serem diferentes, vão formar ligações económicas e ligar-se em redes complexas. Na nossa abordagem, do ponto de vista termodinâmico, são as ligações que formam o ‘banho térmico’.

### 5.3 Trabalho Futuro

O trabalho aqui relatado é muito importante para o desenvolvimento de metodologias e produtos financeiros associados ao comportamento da economia como um todo, uma vez que todos os instrumentos financeiros se baseiam no pressuposto do equilíbrio termodinâmico que aqui contrariámos. Quer em termos de avaliação de risco, quer em termos de valorização de derivados sobre índices macroeconómicos, como índices bolsistas principais ou taxa de juro, cremos que este trabalho oferece um contributo importante.

No entanto, consideramos também que se abriram novas oportunidades de desenvolvimento, tanto ao nível macroscópico como aquele que tratámos, como ao nível do agente individual, que é o objecto de estudo da análise de risco de crédito, do título de capital individual ou mesmo da gestão de fundos de investimento.

Ao nível da partícula individual, como é natural, embora possamos dizer que o comportamento da partícula e do banho em que está mergulhada não são a mesma coisa, o facto é que não são independentes. E não podendo associar o comportamento das partículas a um processo de Wiener, há um conjunto vasto de consequências a

tomar em conta em vários campos das finanças, particularmente em tudo o que diga respeito à gestão de carteiras, uma vez que o conceito de correlação entre as séries temporais assume uma dimensão completamente diferente.

Ao nível macroscópico, o facto de mantermos como completamente determinístico o processo de crescimento, a aderência que o modelo tem aos resultados dos mercados reais é reduzida neste lado do processo. No entanto, temos todas as ferramentas na mão para o fazer e, noutro âmbito, esse trabalho será feito.



# Bibliografia

- [1] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509, 1999.
- [2] A.-L. Barabási and R. Albert. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74, 2002.
- [3] A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 272, 1999.
- [4] P. Altrom. Mean-field exponents for self-organized critical phenomena. *Physical Review A*, 38(9), 1988.
- [5] Andrei Z. Broder, Ravi Kumar, Farzin Maghoul, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Raymie Stata, Andrew Tomkins, and Janet L. Wiener. Graph structure in the web. *Computer Networks*, 33(1-6):309–320, 2000.
- [6] B. Mandelbrot and R. Hudson. *The (mis)Behavior of Markets - A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. Basic Books, 2004.
- [7] P. Bak. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Springer, 1 edition, 1999.
- [8] D.-S. Lee, K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim. Sandpile avalanche dynamics on scale-free networks. *Physica A*, 338:84–91, 2004.
- [9] A. Aharony D. Stauffer. *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 2 edition, 2003.
- [10] G. Debreu. *Theory of Value*. Yale University Press, 1971.
- [11] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549, 1905.
- [12] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–54, May-June 1973.

- [13] F. Louçã and J.C. Caldas. *Economia(s)*. Afrontamento, 2009.
- [14] Theodore E. Harris. *The Theory of Branching Processes*. Springer Berlin, 1963.
- [15] J. Hull. *Options, Futures And Other Derivatives*. Prentice Hall, 2005.
- [16] K. Christensen and N.R. Moloney. *Complexity and Criticality*. Imperial College Press, 2005.
- [17] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim. Sandpile on scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 91(14), 2003.
- [18] K. Kiyono, Z.R. Struzik, and Y. Yamamoto. Criticality and phase transition in stock-price fluctuation. *Physical Review Letters*, 96(6), 2006.
- [19] K.B. Athreya and P.E. Ney. *Branching Processes(Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften Series Vol 196)*. Springer, 1972.
- [20] P. Krugman. Graduates versus oligarchs. *The New York Times*, 2006.
- [21] L.E.Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. John Wiley & Sons, 2 edition, 1998.
- [22] P.G. Lind. The network approach: Basic concepts and algorithms. *arXiv:0711.3972v1 [physics.soc-ph]*, 2007.
- [23] M. Bartolozzi, D.B. Leinweber, and A.W. Thomas. Self-organized criticality and stock market dynamics: An empirical study. *Physica A*, 350(2-4), 2004.
- [24] M. Bartolozzi, D.B. Leinweber, and A.W. Thomas. Scale-free avalanche dynamics in stock market. *Physica A*, 370, 2006.
- [25] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 1973.
- [26] Bank of International Settlements. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Bank of International Settlements, 2004.
- [27] J.-P. Onnela. *Complex Networks in the Study of Financial and Social Systems*. PhD thesis, PhD. Thesis Helsinki University of Technology, 2006.
- [28] R. Otter. The multiplicative process. *Annals of Mathematical Statistics*, 49:206–224, 1949.
- [29] P. Bak, C. Tang, and W. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4), 1987.

- [30] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [31] R. Lipsey and P. Steyner. *Economics*. Harper & Row, 2005.
- [32] R.Friedrich, J. Peinke, and Ch. Renner. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Physical Review Letters*, 84(22), 2000.
- [33] N.N. Taleb. *The Black Swan*. Random House Inc, 2008.
- [34] N.G. VanKampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland Personal Library, 3 edition, 2007.
- [35] O. Vasicek. Probability of loss in loan portfolio. *KMV internal communication*, 1987.
- [36] J. von Neumann. A model of general economic equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 13(1):1–9, 1945.
- [37] W. Ebeling and I. Sokolov. *Statistical Thermodynamics and Stochastic Theory of Nonequilibrium Systems*. World Scientific, 2005.
- [38] Wikipedia. Vilfredo pareto.
- [39] Wikipedia. Wikipedia on lehman brothers.
- [40] P. Wilmott. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. John Willey and Sons, 2001.